

几何形式化在 $SE(3)$ 上的统一力阻抗控制用于机器人机械臂

Joohwan Seo¹, Nikhil Potu Surya Prakash¹, Soomi Lee¹, Arvind Kruthiventy¹, Megan Teng¹,
Jongun Choi^{1,2} and Roberto Horowitz¹

Abstract—在本文中，我们提出了一种基于 $SE(3)$ 流形的阻抗控制框架，该框架能够在保证无源性的同时实现力跟踪。在统一力-阻抗控制 (UFIC) 和我们之前关于几何阻抗控制 (GIC) 工作的基础上，我们开发了几何统一力阻抗控制 (GUFIC)，以使用微分几何视角在控制器公式中考虑 $SE(3)$ 流形结构。与 UFIC 的情况一样，GUFIC 利用能量罐增强来同时实现力跟踪和阻抗控制，以保证操作器相对于外力的无源性。这确保了末端执行器在与不确定环境的接触互动中保持安全，并跟踪期望的互动力。此外，我们通过引入速度和力场解决了 UFIC 公式中的非因果实现问题。由于 GUFIC 在 $SE(3)$ 上的公式，继承了 GIC 所具备的理想 $SE(3)$ 不变性和等变性性质，这有助于在嵌入学习算法到控制法律的机器学习应用中提高样本效率。所提出的控制法律在模拟环境中得到了验证，该环境要求跟踪一个包含位置和方向的 $SE(3)$ 轨迹，同时在表面上施加一个力。代码可在 https://github.com/Joohwan-Seo/GUFIC_mujoco 处获得。

I. 介绍

引入后，阻抗控制 [1] 已被用作涉及与未知环境交互的机器人操作任务的主要控制方案。通常与操作空间公式 [2] 相结合，阻抗控制也被广泛用于控制机械臂的末端执行器。由于阻抗/导纳控制确保了与环境的安全交互，它被用作近期基于学习的策略中的低级控制律 [3]。

最近在深度学习方法方面的进展显示出在执行实际任务中令人印象深刻的结果。特别是，基于模仿学习的策略，例如行为变换器 [4]、扩散策略 [5]、动作分块变换器 [6] 及其变体，通过从视觉输入中生成期望的末端执行器轨迹，展示了成功。

尽管这些作品在现实生活任务中取得了成功，但提供理想姿态的策略可能不足以满足高精度和富接触任务的需求。由于这一限制，近期的工作也提出输出阻抗/导纳增益 [7], [8] 或直接力轮廓 [9]。虽然在设定姿态的基础上更改增益或施加直接力可以提高富接触任务的表现，但此类方法在保证稳定性方面引入了挑战。在任务执行期间更改阻抗/导纳增益通常被称为可变阻抗控制 [10]。然而，从控制理论的角度来看，当增益发生变化时，原始静态增益阻抗/导纳控制器的稳定性结果无法得到保证 [11]。

机械臂与环境的交互稳定性分析通常与耗散性概念紧密联系。这是因为耗散性定理能够提供整个机械臂/环境交互动力学的稳定性保证，如果机械臂的闭环系统被设

计成耗散性的，因为环境是严格耗散性 [12], [13], [14]。[15], [16] 展示了在设计和实施学习控制器以用于自我优化的锻炼机器时使用闭环耗散性，在这种情况下，安全的人机交互是不可或缺的。其他基于耗散性的控制设计示例包括 [17], [18], [19]。

在 [20] 中，提出了统一力-阻抗控制 (UFIC)，作为一种使机器人机械手在执行任务时通过阻抗控制保持与环境接触并施加期望力的方法。通过能量罐增强，UFIC 控制确保了闭环系统的被动性。然而，UFIC 没有考虑机械手末端执行器姿态描述中固有的 $SE(3)$ 流形结构，而仅仅将姿态不对准误差视为笛卡尔向量。[20] 中的另一个缺陷是，为了通过罐增强来确保阻抗控制项的被动性，必须定义一个修改后的期望速度，并将其积分以生成新轨迹。这使得更新下一步的期望速度变得复杂，并可能导致控制过程中的因果性崩溃。在 III-1 节对此进行了进一步讨论。

我们之前关于几何阻抗控制 (GIC) [21], [22] 的工作建立了一个使用微分几何来控制末端执行器位置和方向的统一框架。GIC 框架的一个显著优势是，如 [23] 所示，在控制结构中考虑 $SE(3)$ 流形结构可以导致学习策略中的 $SE(3)$ 不变性和等变性，从而极大地提高样本效率，并在深度学习模型中对分布外数据的鲁棒性。最近也已证明， $SE(3)$ 等变性在提高视觉操控学习模型的样本效率和对分布外数据的鲁棒性方面的优势 [24], [25], [26], [27]。

在本文中，我们提出了一个关于机器人操纵器在 $SE(3)$ 流形上的统一力阻抗控制方案的几何表述，即几何统一力阻抗控制 (GUFIC)。本文的主要贡献可以总结如下：

- 1) 与 [20] 不同，[20] 将平移误差和方向误差分别处理，仿佛它们是向量空间中的元素，我们完全将 $SE(3)$ 的流形结构纳入考量，并在 $SE(3)$ 李群结构中一致地处理平移和方向误差。
- 2) 我们引入了一个与时间相关的速度场来编码任务并推导演迹。因此，对速度场进行的任何调整都保留了因果关系，从而解决了 [20] 中的实现困难。
- 3) 由于我们遵循 [23] 的公式，所得到的控制律是 $SE(3)$ -等变的，因此在学习可迁移性和学习操控任务的样本效率方面提供了进一步的优点。
- 4) 从包含力的学习操控任务的角度来看，控制形式的被动行为将进一步提供诸如接触稳定性等优势。

本文结构如下。在第 II 节中，我们简要介绍了李群 & 代数、操纵器动力学和几何阻抗控制 (GIC) 的基础知识。接下来，我们在第 III 节介绍我们的 GUFIC 框架，并展示其被动性特性。第 ?? 节为仿真结果，验证了在 $SE(3)$ 上的力跟踪和运动跟踪特性。第 IV 节给出了结论性意见。

Joohwan Seo, Soomi Lee, Arvind Kruthiventy, and Roberto Horowitz are partially funded by the Hong Kong Center for Construction Robotics Limited. Jongun Choi was supported by the Ministry of Education of the Republic of Korea and the National Research Foundation of Korea. (NRF) (No.RS-2024-00344732)

¹Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley { joohwan_seo, nikhilps, soomi_lee, arvindruthiventy, meganteng, horowitz } @berkeley.edu

²School of Mechanical Engineering, Yonsei University joungeunchoi@yonsei.ac.kr

II. 预备知识

机械臂末端执行器的构型可以由其位置和方向来定义。在许多其他表示方法中，如用于方向的欧拉角和四元数，我们感兴趣的是位置和方向的统一表示，即特殊欧几里得群 $SE(3)$ 。我们通过从末端执行器框架 $\{e\}$ 到固定（惯性）空间框架 $\{s\}$ 的齐次坐标变换矩阵 g_{se} 来描述末端执行器的构型。

$$g_{se} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \quad (1)$$

其中 R 是一个旋转矩阵，以及 $R \in SO(3)$ 和 $p \in \mathbb{R}^3$ 。注意，(1) 中的这种矩阵表示被称为齐次矩阵表示。我们将省略下标 s ，因为空间坐标框架可以被看作是一个恒等式而不失一般性。此外，我们为了记号的简洁性，将省略当前末端执行器构型的下标 e ，除非特别注明，即 $g_{se} = g$ 。我们使用 $g = (p, R)$ 以保持记号简练。

$SE(3)$ 和 $se(3)$ 的李代数可以表示为

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in se(3), \quad \forall \xi = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad v, \omega \in \mathbb{R}^3, \quad \hat{\omega} \in so(3).$$

关于用于机器人机械手的李群的详细信息，请参见 [28], [29]。还要注意，我们使用了 [21] 中定义的标准尖帽映射和圆钝映射符号。我们还指出， $se(3)$ 与 $\mathbb{R}^6$ 是同构的。

不失一般性，我们考虑一个转动关节机械臂的机械臂动力学，在这里， $q = [q_1, \dots, q_n]^T \in \mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S} \triangleq \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ （重复 n 次）是关节坐标， $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称正定惯性矩阵， $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是科里奥利矩阵， $G(q) \in \mathbb{R}^n$ 是由于重力产生的力矩项， $T \in \mathbb{R}^n$ 是控制输入关节力矩， $T_e \in \mathbb{R}^n$ 是由于外部干扰产生的关节力矩。相对于末端执行器的体坐标系的 $SE(3)$ 操作空间动力学如下：[22]，并且 $J_b(q)$ 是末端执行器体坐标系雅可比矩阵，即，

$$V^b = \begin{bmatrix} v^b \\ \omega^b \end{bmatrix} = J_b(q)\dot{q}, \quad (2)$$

，其中上标 b 表示向量是在体坐标系上定义的， v^b 和 ω^b 分别是平移和旋转速度。

请注意，在我们的论文 [21] 中，我们使用符号 $\tilde{T}$ 来表示 $se(3)^*$ 工具末端空间中的扳手，但是我们将使用符号 F ，按照 [20] 中的符号表示法，以展示与 UFIC 公式的直接联系。此外，我们定义 F_e 为环境施加在机器人上的外力扳手，它与期望的扳手相反。我们还注意到，为了简洁，我们将经常省略关节坐标和关节速度的依赖，除非为了清晰起见，例如 $\tilde{M} = \tilde{M}(q)$ 和 $\tilde{C} = \tilde{C}(q, \dot{q})$ 。

在 [21], [22] 中，提出了几何阻抗控制（GIC）来控制末端执行器在 $SE(3)$ 流形上的位置和方向。总之，GIC 控制律如下所示：

$$F_i = \tilde{M}\dot{V}_d^* + \tilde{C}V_d^* + \tilde{G} - f_g(g, g_d) - K_d e_V, \quad (3)$$

其中 $g = (p, R)$ 是当前末端执行器的配置， $g_d = (p_d, R_d)$ 是期望配置， $g, g_d \in SE(3)$ ，并且 $K_d \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 是对称正定阻尼矩阵。另外， $e_V = V^b - V_d^*$ 、 $V_d^* = \text{Ad}_{g_{ed}} V_d^b$ 、 $g_{ed} = g^{-1}g_d$ 和 $\text{Ad} : SE(3) \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ 是一个大的伴随映射，给出为：

$$\text{Ad}_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (4)$$

我们使用 V_d^* ，星号符号，表示期望的主体框架速度被转化为当前配置。对于广义向量或共向量，我们将使用

相同的符号。(3) 中的 f_g 项是在 $SE(3)$ 中的弹性力：

$$f_g(g, g_d) = \begin{bmatrix} f_p(g, g_d) \\ f_R(g, g_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T R_d K_p R_d^T (p - p_d) \\ (K_R R_d^T R - R^T R_d K_R)^V \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中 $K_p, K_R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 分别是平移和旋转动力学的对称正定刚度矩阵。

GIC 控制律 (3) 是利用 $SE(3)$ 上的势能和动能函数来制定的。我们将在多个可能的势能函数 [22] 中选择从李群导出的势能函数。因此，误差势能函数 $P(t, q)$ 和误差动能函数 $K(t, q, \dot{q})$ 定义如下：

$$P(t, q) = \text{tr}(K_R(I - R_d^T R)) + \frac{1}{2}(p - p_d)^T R_d K_p R_d^T (p - p_d)$$

$$K(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} e_V^T \tilde{M} e_V, \quad (6)$$

应该注意的是，GIC 定律是基于以下假设制定的：

Assumption 1 ([21]): 末端执行器位于一个区域 $D \subset SE(3)$ 内，使得雅可比矩阵 J_b 是满秩的。此外，机械臂的末端执行器和期望轨迹位于可达集 $\mathcal{R}$ 中，即

$$p(q) \in \mathcal{R} = \{p(q) \mid \forall q \in \mathcal{S}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

，并且期望轨迹也是连续可微的。

基于 GIC 定律，我们开发了一种学习变量阻抗控制来解决插销任务问题 [23]，表明所得方法是 $SE(3)$ 等变的。然而，如 [11] 中所述，当阻抗增益改变时，原始控制规律的稳定性性质可能不再有效。事实上，通过能量被动性性质 [30], [12]，可以更好地理解控制系统与外部环境相互作用时的稳定行为。另一方面，从装配任务的角度来看，变量阻抗控制的最终目标是适应外部力 [31]，这意味着将变量阻抗控制形式化为允许直接力反馈的控制可能更为有利。

因此，下一部分介绍一种几何统一力-阻抗控制，这是一种增强型 GIC 的力控制，通过能量罐来保持被动性。

III. 几何统一力阻抗控制

在这一部分中，我们将重新表述原始的统一力-阻抗控制 (UFIC) [20]，以便充分考虑末端执行器的 $SE(3)$ 流形结构。通过将其整理为 GIC 形式，当结合学习进行增强时，所得的控制框架享有 $SE(3)$ 等值性属性，如 [23] 中所建议的。

在本节中，我们将在 (3) 的几何阻抗控制 F_i 中增加力跟踪控制 F_f ，以便总输入控制扳手为

$$F = F_i + F_f, \quad (7)$$

，其中 $T_f = J_b^T F_f$ ，并且

$$F_f = -k_p(-\bar{F}_e - F_d) - k_d \frac{d}{dt}(-\bar{F}_e - F_d) - k_i \int (-\bar{F}_e(\tau) - F_d(\tau)) d\tau + F_d. \quad (8)$$

。正如在 [20] 中，我们使用 $\bar{F}_e = \bar{F}_e(t)$ 作为力/扭矩传感器的输出，而不将其与 F_e 实际施加到机器人 F_e 上的外部扳手区分开来。我们还定义 $F_d = F_d(t, g)$ 来表示期望的力场。关于力场公式的细节将在后面的章节中进一步讨论。然而，如以下将展示的，简单的力-阻抗控制规律 (7) 不是被动的。

当满足下列条件时，控制系统相对于对偶 (V^b, F_e) ，或供给率 $(V^b)^T F_e$ 是无源的：

$$\dot{S} \leq (V^b)^T F_e, \quad (9)$$

其中 $S \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个正定的存储函数。注意施加在环境上的力为 $-F_e$ ，环境的无源性条件为

$$\dot{S}_{env} \leq (V^b)^T(-F_e), \quad (10)$$

，即，它应该在对偶 $(V^b, -F_e)$ 下是无源的。使用简单几何力-阻抗控制律的误差动力学可以写成

$$\tilde{M}\dot{e}_V + \tilde{C}e_V + K_d e_V + f_G - F_f - F_e = 0. \quad (11)$$

根据 [21] 的公式，我们将使用 $SE(3)$ 中的势能函数和动能函数的总和作为存储函数，即

$$S(t, q, \dot{q}) = K(t, q, \dot{q}) + P(t, q), \quad (12)$$

，其中 K 和 P 在 (6) 中定义。利用 [21], [22] 中的 $\dot{P} = f_G^T e_V$ 的事实，可以进一步证明

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= e_V^T \tilde{M}\dot{e}_V + \frac{1}{2} e_V^T \dot{\tilde{M}} e_V + f_G^T e_V \\ &= e_V^T (-\tilde{C}e_V - K_d e_V - f_G + F_f + F_e + f_G) + \frac{1}{2} e_V^T \dot{\tilde{M}} e_V \\ &= \underbrace{e_V^T (\frac{1}{2} \dot{\tilde{M}} - \tilde{C}) e_V}_{=0} - \underbrace{e_V^T K_d e_V}_{\geq 0} + e_V^T F_f + e_V^T F_e \\ &\leq (V^b)^T F_e + (V^b)^T F_f - (V_d^*)^T (F_f + F_e). \end{aligned} \quad (13)$$

。由于 $(V^b)^T F_f$ 和 $(V_d^*)^T (F_f + F_e)$ 项的符号未确定，控制系统的无源性无法得到保证。

为了使控制系统闭环被动，我们将通过储能装置的增加，为力跟踪和阻抗控制器引入能量存储，如同在 [20] 中所述。

首先，对于端口 (V^b, F_f) ，与力控制 T_f 相关的能量罐首先定义为

$$T_f = \frac{1}{2} x_{tf}^2, \quad x_{tf} \neq 0, \quad (14)$$

，其中罐状态动态为

$$\dot{x}_{tf} = -\frac{\beta_f}{x_{tf}} \gamma_f (V^b)^T F_f + \frac{\alpha_f}{x_{tf}} (\gamma_f - 1) (V^b)^T F_f, \quad (15)$$

，其中 $T^{u,f}$ 和 $T_{l,f}$ 分别表示用于力跟踪控制的能量罐的上限和下限，而 $\delta_{T,f}$ 是能量罐下限的边距，以实现平滑切换行为。 γ_f 的目的是指示力跟踪律 F_f 是否处于打破无源性的方向， β_f 是为了防止能量罐溢出。根据能量罐的水平 γ_f 的值，对力跟踪律 F_f 进行修改，如

$$F_f' = (\gamma_f + \alpha_f(1 - \gamma_f)) F_f. \quad (16)$$

所示。如稍后将澄清的那样，(16) 的作用是保证力跟踪端口 (V^b, F_f') 的无源性。其次，对于端口 $(V_d^*, -(F_f' + F_e))$ ，与阻抗控制 T_i 相关的能量罐水平定义为

$$T_i = \frac{1}{2} x_{ti}^2, \quad x_{ti} \neq 0, \quad (17)$$

，其中罐状态动态由

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ti} &= \frac{\beta_i}{x_{ti}} (\gamma_i (V_d^*)^T (F_f' + F_e) + (e_V')^T K_d e_V') \\ &\quad + \frac{\alpha_i}{x_{ti}} (1 - \gamma_i) (V_d^*)^T (F_f' + F_e), \end{aligned} \quad (18)$$

给出，其中

$$e_V' = V^b - (\gamma_i + \alpha_i(1 - \gamma_i)) V_d^* = V^b - (V_d^*)'$$

，并且

$$(V_d^*)' = (\gamma_i + \alpha_i(1 - \gamma_i)) V_d^* \quad (19)$$

是经过修改的期望速度。 γ_i ， β_i 和 α_i 分别定义为

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{if } (V_d^*)^T (F_f' + F_e) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \beta_i = \begin{cases} 1 & \text{if } T_i \leq T^{u,i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{if } T_i \geq T_{l,i} + \delta_{T,i} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{T_i - T_{l,i}}{\delta_{T,i}} \pi \right) \right) & \text{if } T_{l,i} + \delta_{T,i} \geq T_i \geq T_{l,i} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

，其中 $T^{u,i}$ 和 $T_{l,i}$ 分别表示阻抗控制能量罐的上限和下限， $\delta_{T,i}$ 是用于平滑阻抗控制能量罐的边距，类似于用于力跟踪控制的。

1) 速度场和力场公式：当实现修改后的期望速度 $(V_d^*)'$ 时，一个微妙的挑战出现了：需要相应地更新相应信号 $(\hat{V}_d^*)'$ 和 g_d' 。虽然原始工作 [20] 建议适当地对修改后的速度信号进行积分和微分，但天真的实现方式很容易导致因果关系问题，因此需要仔细的工程设计以确保精确更新。具体来说，在当前时间步长对修改后的速度进行积分可以得到更新后的轨迹，但无法以因果方式直接计算出下一步的期望速度。为了解决这个问题，我们建议采用速度场 [12] 的概念。正式地，速度场 $V_d^*(t, g)$ 被定义为从当前时间 t 和当前位置 $g \in SE(3)$ 到李代数 $se(3)$ 的向量的映射，从而确保 $g(t) V_d^*(t, g) \in T_g SE(3)$ 。因此，我们提出的速度场被表示为 $\hat{V}_d^* : \mathbb{R}_{\geq 0} \times SE(3) \rightarrow se(3)$ ，它显式依赖于时间和位姿，而不仅仅是时间。

a) 速度场：首先，我们将原始时间轨迹表示为 $\bar{g}_d(t) = (\bar{p}_d(t), \bar{R}_d(t))$ ，它们对应的期望体坐标系速度表示为 $\hat{V}_d^b(t)$ 。我们也将忽略时间依赖性以避免混乱，例如 $\bar{g}_d = \bar{g}_d(t)$ 。根据 [12] 的公式，并结合 $SE(3)$ 的流形感知，从期望轨迹 $\bar{g}_d$ 和 $\hat{V}_d^b = \bar{g}_d^{-1} \dot{\bar{g}}_d$ 得到的时间变化速度场 $\hat{V}_d^*(t, g)$ 为

$$\hat{V}_d^*(t, g) = \bar{g}_{ed} \hat{V}_d^b(t) \bar{g}_{ed}^{-1} + \zeta \nabla_1 \Psi(g, \bar{g}_d), \quad (20)$$

，其中 $\bar{g}_{ed} = g^{-1} \bar{g}_d$ 。 $\Psi(g, \bar{g}_d)$ 是一个误差函数，定义为 $\Psi(g, g_d) = \frac{1}{2} \|I_4 - g_d^{-1} g\|_F^2 = \text{tr}(I - R_d^T R) + \frac{1}{2} \|p - p_d\|_2^2$, (21)

，可以作为 $SE(3)$ 上的距离度量，正如 [21] 中提出。 $\zeta \in \mathbb{R}_{>0}$ 是一个正的标量增益，而 ∇_1 表示函数第一个参数的梯度。还可以注意到来自 [28] (见第 2.4 章)，

$$\hat{V}_d^* = \bar{g}_{ed} \hat{V}_d^b \bar{g}_{ed}^{-1} \iff \bar{V}_d^* = \text{Ad}_{\bar{g}_{ed}} \hat{V}_d^b.$$

此外，在 [21] 中表明

$$\nabla_1 \Psi(g, \bar{g}_d) = \hat{e}_G(g, \bar{g}_d), \quad (22)$$

，其中 $\hat{e}_G(g, \bar{g}_d)$ 是一个几何一致误差向量 (GCEV)，在 [23], [21] 中提出，其定义为

$$e_G(g, g_d) = \begin{bmatrix} R^T(p - p_d) \\ (R_d^T R - R^T R_d)^\vee \end{bmatrix}, \quad (23)$$

，另请参见 [32], [33], [34] 以了解有关 $SE(3)$ 的更多结果，以及 [35] 以了解 $SO(3)$ 的结果。

既然我们已经具备了速度场 $V_d^*(t, g)$ ，就可以自由地应用速度修正律 (19)。使用修正后的速度场进行轨迹跟踪 $(\hat{V}_d^*(t, g))'$ ，可以通过从

$$\dot{g}_d' = g_d' (\hat{V}_d^b)', \quad (24)$$

积分得到修正后的期望构型，其中 $(V_d^b)' = \text{Ad}_{g_{ed}^{-1}} (V_d^*)'$ ，可以通过

$$g_d'(t + \Delta t) \cong g_d(t)' \exp(\hat{V}_d^b \Delta t)'.$$

进行离散化。我们强调，由于期望姿态现在是从速度场推导出来的，因此修正速度场并获得期望姿态可以在不丧失因果性的情况下进行。

速度场 V_d^* 的时间导数需要被直接计算。对 V_d 和 $\dot{V}_d^*$ 的完整计算在附录中展示。A。

由于期望速度是与场一起构建的，因此期望力也可以与场结构类似地构建。为了提供最大自由度，我们将期望力构建为一个随时间变化的速度场，即 $F_d = F_d(t, g) \in T_g^*SE(3)$ ，其中 $T_g^*SE(3)$ 表示 $T_gSE(3)$ 的对偶空间。基于这一构建，可以通过去掉对当前配置 g 的依赖来使用一个时间相关的期望力，反之亦然。另一个考虑因素是是否在点 g 或 g_d 上定义期望力，即在 $SE(3)$ 流形上。当期望力表示在期望位姿的对偶空间 g_d 、 $F_d(t) \in T_{g_d}^*SE(3)$ 上时，需要应用适当的坐标变换（对偶伴随映射） $\text{Ad}_{g_{ed}^{-1}}^*$ [23]，以便：

$$F_d^*(t) = \text{Ad}_{g_{ed}^{-1}}^* F_d(t) = \text{Ad}_{g_{ed}^{-1}}^T F_d(t) \in T_g^*SE(3).$$

在本文中，我们将只考虑简单情况，其中 F_d 在空间和时间上是常数。

2) 最终几何统一力-阻抗控制器：使用从速度场计算出的修正设定点，修正后的阻抗控制器被公式化如下：

$$F_i' = \tilde{M}(\dot{V}_d^*)' + \tilde{C}(V_d^*)' + \tilde{G} - f_G(g, g_d') - K_d e_V'. \quad (25)$$

更新后的存储函数现在为：

$$S = \frac{1}{2}(e_V')^T \tilde{M} e_V' + P(g, g_d'). \quad (26)$$

综合所有内容，最终的 GUFIC 如下：

$$T = J_b^T F', \text{ where } F' = F_f' + F_i', \quad (27)$$

其中 F_f' 和 F_i' 分别如 (16) 和 (25) 所示。本文的主定理是：

Theorem 1 (Passivity of the GUFIC): 假设假设 ?? 成立。考虑具有动态 (??) 和 GUFIC 控制律 (27) 的机器人机械臂。然后，闭环系统对于通道 (V^b, F_e) 是无源的，相对于存储函数 (30)。

Proof: 使用控制律 (27)，修正误差动力学变为

$$\tilde{M}\dot{V}^b + \tilde{C}V^b + \tilde{G} = F_f' + F_i' + F_e \quad (28)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}\dot{e}_V' + \tilde{C}e_V' + K_d e_V' + f_G(g, g_d') = F_f' + F_e.$$

与 (25)，(16) 和 (24) 一起，贮存函数的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (e_V')^T \tilde{M}\dot{e}_V' + (e_V')^T \frac{1}{2} \dot{\tilde{M}} e_V' + (e_V')^T f_G(g, g_d') \\ &= (e_V')^T (-\tilde{C}e_V' - f_G(g, g_d') - K_d e_V' + F_f' + F_e) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\tilde{M}} e_V' + (e_V')^T f_G(g, g_d') \\ &= -(e_V')^T K_d e_V' + (e_V')^T F_f' + (e_V')^T F_e. \end{aligned} \quad (29)$$

通过增加能量罐 T_i 和 T_f ，总贮存函数 S_{tot} 现在为

$$S_{tot} = S + T_i + T_f. \quad (30)$$

使用 (15) 和 (18) 导出 $T_f = \frac{1}{2}x_{tf}^2$ 和 $T_i = \frac{1}{2}x_{ti}^2$ 的时间导数如下：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T_f + T_i) &= x_{tf}\dot{x}_{tf} + x_{ti}\dot{x}_{ti} \\ &= -\beta_f \gamma_f (V^b)^T F_f + \alpha_f (\gamma_f - 1) (V^b)^T F_f \\ &\quad + \beta_i (\gamma_i (V_d^*)^T (F_f' + F_e) + (e_V')^T K_d e_V') \\ &\quad + \alpha_i (1 - \gamma_i) (V_d^*)^T (F_f' + F_e). \end{aligned} \quad (31)$$

然后总贮存函数的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{S}_{tot} &= \dot{S} + \dot{T}_f + \dot{T}_i \\ &= -(e_V')^T K_d e_V' + (V^b)^T F_e + (V^b)^T F_f' - (V_d^*)^T (F_f' + F_e) \\ &\quad - \beta_f \gamma_f (V^b)^T F_f + \alpha_f (\gamma_f - 1) (V^b)^T F_f \\ &\quad + \beta_i (\gamma_i (V_d^*)^T (F_f' + F_e) + (e_V')^T K_d e_V') \\ &\quad + \alpha_i (1 - \gamma_i) (V_d^*)^T (F_f' + F_e). \end{aligned} \quad (32)$$

通过一些代数运算，可以得到

$$\begin{aligned} \dot{S}_{tot} &= \underbrace{\gamma_f (1 - \beta_f) (V^b)^T F_f}_{\leq 0} + \underbrace{(\beta_i - 1) (e_V')^T K_d e_V'}_{\leq 0} \\ &\quad + \underbrace{\gamma_i (\beta_i - 1) (V_d^*)^T (F_f' + F_e)}_{\leq 0} + (V^b)^T F_e. \end{aligned} \quad (33)$$

为了详细说明，我们可以查看当过渡性被破坏的情况。对于端口 (V^b, F_f) ， γ_f 的值取决于过渡性条件。当过渡性条件得到满足时，即 $(V^b)^T F_f < 0$ ，则 $\gamma_f = 1$ ，当过渡性被破坏时，则 $\gamma_f = 0$ 。在 (33) 中与这个端口相关的项为 $\gamma_f (1 - \beta_f) (V^b)^T F_f$ 。由于 $(1 - \beta_f) \geq 0$ 总是满足（因为 $\beta_f \in \{0, 1\}$ ），而且如果过渡性被破坏， $\gamma_f = 0$ 成立，我们可以证明：

$$\gamma_f (1 - \beta_f) (V^b)^T F_f \leq 0 \quad (34)$$

在每种情况下都成立。同样，对于端口 $(V_d^*, -(F_f' + F_e))$ ， $\gamma_i = 1$ 只有当过渡性条件得到满足时才成立，否则 0。当 $(\beta_i - 1) \leq 0$ 时，可以验证项 $(\beta_i - 1) (e_V')^T K_d e_V' \leq 0$ 和 $\gamma_i (\beta_i - 1) (V_d^*)^T (F_f' + F_e) \leq 0$ 。结合这些结果，显示

$$\dot{S}_{tot} \leq (V^b)^T F_e, \quad (35)$$

证明闭环系统是被动的。■

Remark 1 (Stability Result): 利用结果 (35)，可以证明系统的稳定性，类似于 [20]。通过李雅普诺夫直接法的证明可以使用包含耦合项的增强型李雅普诺夫函数，如在 [21], [32] 中所示。稳定性分析的主要含义是：1. 系统渐近收敛到 g_d' ，即修正后设定点；2. 当 g 收敛到 g_d' 时，力也将收敛到 $F_d = -F_e$ 。

Remark 2 (SE(3) Invariance and Equivariance):

所提出的 GUFIC 框架也是 $SE(3)$ 不变的。对于与 GIC 相关的术语，左不变性来自于 [23] 中的引理 1 的结果。力跟踪律和速度场及力跟踪律的修改均在附着于末端执行器的机体坐标系中定义，导致控制器具有 $SE(3)$ 不变性质。此外，由于 GUFIC 律满足 $SE(3)$ 左不变性并定义在末端执行器机体坐标系中，因此该控制律是 $SE(3)$ 同性的（参见 [23] 的命题 2）。

我们在 Mujoco 环境中实现了 GUFIC 控制律，因为这个环境以处理接触相关的模拟而闻名。来自 Neuromeka 的 Indy7 机器人被集成到 Mujoco 环境中。在这个模拟研究中，我们展示了两个力控制场景：1. 机器人沿着圆形轨迹运动同时对表面施加力；2. 机器人沿着球体上的轨迹运动，并结合 $SE(3)$ 运动。

力-扭矩传感器值已传递给截止频率为 5Hz 的 n^d 阶低通滤波器。整个仿真和控制循环的采样频率为 1000Hz。

在这种情境下，机器人在施加力场时遵循圆形轨迹。至于基准控制器，我们将使用标准 GIC 控制器。对于标准阻抗控制器而言，要在表面上施加期望的力，需知道表面的几何信息或适应性法则。在此情境下，我们假设 GIC 控制器没有精确的信息，只有一个粗略的猜测，从而导致

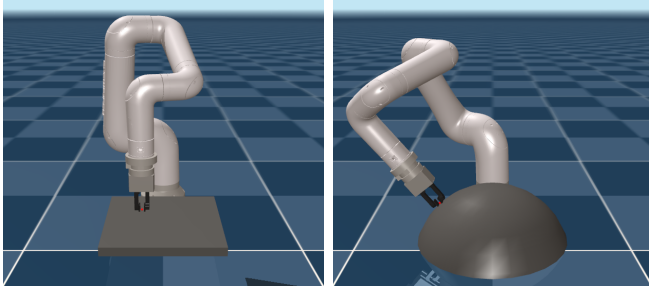


Fig. 1: 使用 Indy7 机器人实现了 Mujoco 仿真环境。(左) 机器人在施加法向力的同时跟随圆形轨迹。(右) 机器人在施加法向力的同时在球体上跟随直线轨迹。

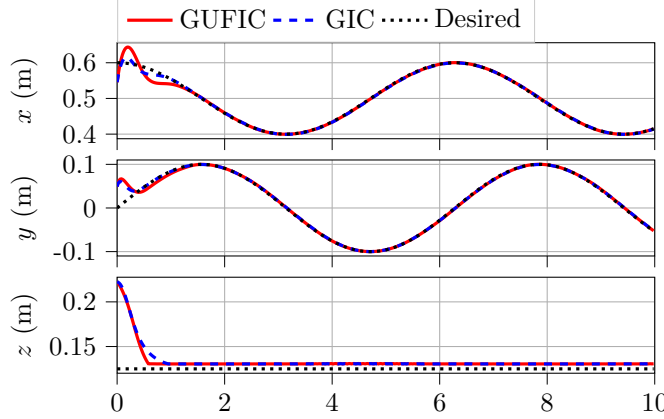


Fig. 2: GUFIC 和 GIC 在场景 1 中的轨迹跟踪结果。

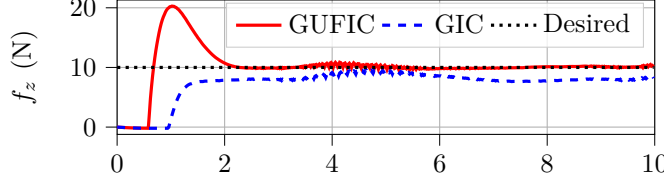


Fig. 3: 场景 1 的 GUFIC 和 GIC 的力跟踪结果。

施加错误的力。特别是，期望的轨迹 $\bar{g}_d(t) = (\bar{p}_d(t), \bar{R}_d(t))$ 给定

注意表面的中心位置给为 $p_{surface} = [0.5, 0.0, 0.1308]^T$ ，并且 GIC 和 GUFIC 的目标位置都在表面内部，以便进行适当的接触。GUFIC 的增益为 $K_p = \text{blkdiag}([2000, 2000, 10])$ 、 $K_R = \text{blkdiag}([2000, 2000, 2000])$ 、 $(k_p, k_i, k_d) = (1.0, 0.5, 4.0)$ 和 $K_d = 500I_{6 \times 6}$ 。在速度场生成中，使用了 $\zeta = 5$ 。对于 GIC，除了 $K_p = \text{blkdiag}([2500, 2500, 1500])$ 以外，其他增益值都与 GUFIC 相同，并且不使用 PID 增益进行力跟踪控制。罐子的初始值选择为 10，最低值为 $T_{l,i} = T_{l,f} = 0.1$ ，最高值为 $T^{u,i} = T^{u,f} = 20$ ，缓冲区为 $\delta_{T,i} = \delta_{T,f} = 0.5$ 。力场选择为 $F_d(t, g) = [0, 0, 10, 0, 0, 0]^T$ 。

第一个场景的轨迹跟踪结果如图 Fig. 2 所示。可以看出，两种方法都显示出几乎完美的轨迹跟踪结果。表面法向方向的力跟踪结果如图 Fig. 3 所示。由于 GIC 对表面只有粗略的信息，因此所需力的增益值未知，这导致跟踪所需力时出现显著的稳态误差。任务期间的储能数值如图 Fig. 4 所示。由于储能数值在任务执行期间没有耗尽，因此任务能够成功完成。

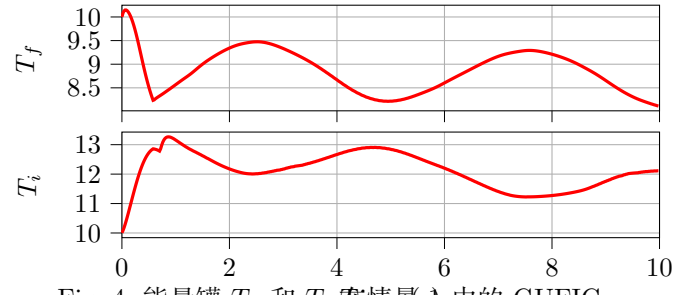


Fig. 4: 能量罐 T_f 和 T_i 在场景 1 中的 GUFIC。

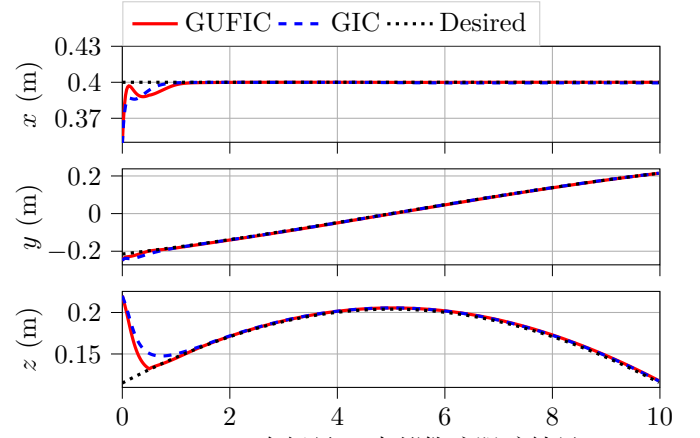


Fig. 5: GUFIC 在场景 2 中的轨迹跟踪结果。

在这个场景中，控制器尝试在一个球面上沿着轨迹运动，同时施加一个法向力。具体来说，期望的轨迹 $\bar{g}_d(t)$ 如下所示：

$$\bar{p}_d(t) = [0.4, 0 + 0.3 \sin \theta(t), -0.1 + 0.3 \cos \theta(t)]^T, \quad (36)$$

$$\bar{R}_d(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta(t)) & 0 & \sin(-\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\theta(t)) & 0 & \cos(-\theta(t)) \end{bmatrix},$$

其中 $\theta(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{20}t$ 。注意，我们使用了与场景 1 相同的增益值，除了力跟踪控制器的 PID 增益外。本场景中使用的增益是 $(k_p, k_i, k_d) = (1.5, 0.75, 6.0)$ 。阻抗储能的初始值为 90，上限 $T^{u,i}$ 为 100。

第二种情况下的轨迹跟踪结果如图 5 所示，对于 x 和 y 方向显示出完美的轨迹跟踪结果，但在 z 方向存在轻微的稳态误差，这是由于关于球体的信息不完美所致。误差函数 $\Psi(21)$ 如图 6 所示，显示了平移和旋转动力学的跟踪误差的收敛。力跟踪结果绘制在图 7 中，显示了 GUFIC 的收敛性，但 GIC 存在显著误差。能量罐 T_f 和 T_i 如图 8 所示。由于前馈速度 V_d^* 在被动违反方向上，阻抗控制罐 T_i 迅速减少。因此，我们设定了比前一种情况显著更高的初始值 $T_i(0)$ 以防止耗尽。正如 [20] 中已经指出的，当阻抗罐 T_i 耗尽时，修改后的期望速度场 $(V_d^*)'$ 归零，导致静态的期望姿态，即 $g_d(k+1) = g_d(k)$ 。类似地，当力控罐 T_f 耗尽时，修改后的力控 $(F_f)'$ 归零。

IV. 结论与未来工作

本文提出了一种几何统一力-阻抗控制 (GUFIC) 框架，该框架充分利用 $SE(3)$ 流形结构以实现鲁棒力跟踪，同时确保耗散性。所提出的方法通过向控制器增加能量储罐，确保与不确定环境的安全交互。此外，速度和力场

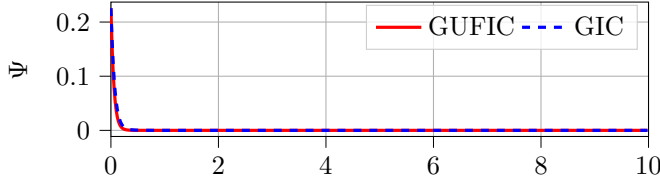


Fig. 6: 场景 2 的 GUFIC 误差函数 Ψ (21)。

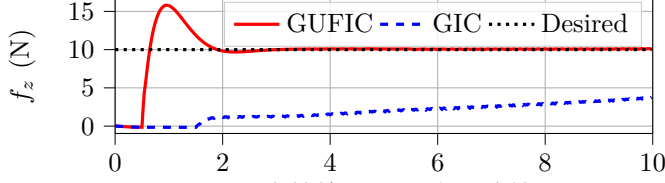


Fig. 7: GUFIC 在情境 2 下的力跟踪结果。

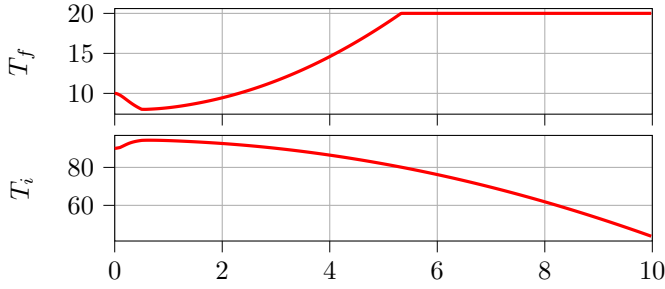


Fig. 8: 情境 2 下 GUFIC 的能量罐 T_f , T_i 。

的引入解决了早期框架中存在的非因果实施问题。通过差分几何方法，统一力-阻抗控制的设计获得了 $SE(3)$ 不变性和协变性特性，提高了学习样本效率。仿真结果已经验证了 GUFIC 在执行复杂 $SE(3)$ 运动方面的有效性，展示了其在保持期望力分布的同时跟踪具有位置和方向变化的轨迹的能力。

尽管我们在本文中假设速度和力场是预先定义和提供的，但一个有趣的问题出现了：这些场是否可以通过专家的演示来学习。在这一方面，我们的未来工作将着重于通过模仿学习利用等变学习方法来学习速度和力场，以便整个模型管道可以保证被动性和等变性。

APPENDIX

A. 速度场 V_d^* 的时间导数

The proposed velocity field (20) reads

$$\begin{aligned}\hat{V}_d^*(t, g) &= \bar{g}_{ed} \hat{V}_d^b(t) \bar{g}_{ed}^{-1} + \zeta \hat{e}_G(g, \bar{g}_d) \\ &= \begin{bmatrix} R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T R & R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T (p - \bar{p}_d) + R^T \dot{\bar{p}}_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \zeta \begin{bmatrix} \bar{R}_d^T R - R^T \bar{R}_d & R^T (p - \bar{p}_d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

The time derivatives of each term can be straightforwardly obtained as follows:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T R) &= \\ &= -\dot{\omega}^b R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T R + R^T \ddot{R}_d \bar{R}_d^T R + R^T \dot{R}_d \dot{\bar{R}}_d^T R + R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T R \dot{\omega}^b \\ \frac{d}{dt}(R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T (p - \bar{p}_d) + R^T \dot{\bar{p}}_d) &= \\ &= -\dot{\omega}^b R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T (p - \bar{p}_d) + R^T \ddot{R}_d \bar{R}_d^T (p - \bar{p}_d) + R^T \dot{R}_d \dot{\bar{R}}_d^T (p - \bar{p}_d) \\ &\quad + R^T \dot{R}_d \bar{R}_d^T (R^T v - \dot{\bar{p}}_d) - \dot{\omega}^b R^T \dot{\bar{p}}_d + R^T \ddot{\bar{p}}_d\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{R}_d^T R - R^T \bar{R}_d) = \dot{\bar{R}}_d^T R + R_d^T R \dot{\omega}^b + \dot{\omega}^b R^T R_d - R^T \dot{R}_d$$

$$\frac{d}{dt}(R^T (p - \bar{p}_d)) = -\dot{\omega}^b R^T (p - \bar{p}_d) + v - R^T \dot{\bar{p}}_d$$

Note that $V^b = [(v^b)^T, (\omega^b)^T]^T$ is obtained from $V^b = J_b(q)\dot{q}$ and that $\dot{R} = R\dot{\omega}^b$ and $\dot{p} = R^T v$ are utilized. Also note that time derivatives of R_d and p_d can be obtained from the trajectory signals.

REFERENCES

- [1] N. Hogan, "Impedance control: An approach to manipulation: Part ii—implementation," 1985.
- [2] O. Khatib, "A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation," *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 3, no. 1, pp. 43–53, 1987.
- [3] M. Bogdanovic *et al.*, "Learning variable impedance control for contact sensitive tasks," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 6129–6136, 2020.
- [4] N. M. Shafiuallah *et al.*, "Behavior transformers: Cloning k modes with one stone," *Advances in neural information processing systems*, vol. 35, pp. 22955–22968, 2022.
- [5] C. Chi *et al.*, "Diffusion policy: Visuomotor policy learning via action diffusion," *The International Journal of Robotics Research*, p. 02783649241273668, 2023.
- [6] Z. Fu *et al.*, "Mobile aloha: Learning bimanual mobile manipulation with low-cost whole-body teleoperation," *arXiv preprint arXiv:2401.02117*, 2024.
- [7] B. Zhou *et al.*, "Admittance visuomotor policy learning for general-purpose contact-rich manipulations," *arXiv preprint arXiv:2409.14440*, 2024.
- [8] T. Kamijo *et al.*, "Learning variable compliance control from a few demonstrations for bimanual robot with haptic feedback teleoperation system," in *2024 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2024, pp. 12663–12670.
- [9] Y. Wu *et al.*, "Tacdiffusion: Force-domain diffusion policy for precise tactile manipulation," *arXiv preprint arXiv:2409.11047*, 2024.
- [10] M. Suomalainen *et al.*, "A survey of robot manipulation in contact," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 156, p. 104224, 2022.
- [11] K. Kronander and A. Billard, "Stability considerations for variable impedance control," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 32, no. 5, pp. 1298–1305, 2016.
- [12] P. Y. Li and R. Horowitz, "Passive velocity field control of mechanical manipulators," *IEEE Transactions on robotics and automation*, vol. 15, no. 4, pp. 751–763, 2002.
- [13] —, "Passive velocity field control of (pvfc), part i. geometry and robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 9, pp. 1346–1359, 2001.
- [14] —, "Passive velocity field control of (pvfc), part ii. application to contour following," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 9, pp. 1360–1371, 2001.
- [15] —, "Control of smart exercise machines. i. problem formulation and nonadaptive control," *IEEE IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, vol. 2, no. 4, pp. 237–247, 1997.
- [16] —, "Control of smart exercise machines. ii. self-optimizing control," *IEEE IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, vol. 2, no. 4, pp. 248–258, 1997.
- [17] F. Ferraguti *et al.*, "An energy tank-based interactive control architecture for autonomous and teleoperated robotic surgery," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 5, pp. 1073–1088, 2015.
- [18] R. Rashad *et al.*, "Energy tank-based wrench/impedance control of a fully-actuated hexarotor: A geometric port-hamiltonian approach," in *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2019, pp. 6418–6424.
- [19] Y. Michel *et al.*, "Passivity-based variable impedance control for redundant manipulators," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 9865–9872, 2020.

- [20] S. Haddadin and E. Shahriari, “Unified force-impedance control,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 43, no. 13, pp. 2112–2141, 2024.
- [21] J. Seo *et al.*, “Geometric impedance control on SE(3) for robotic manipulators,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 56, no. 2, pp. 276–283, 2023.
- [22] —, “A comparison between lie group-and lie algebra-based potential functions for geometric impedance control,” *arXiv preprint arXiv:2401.13190*, 2024.
- [23] —, “Contact-rich SE(3)-equivariant robot manipulation task learning via geometric impedance control,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2023.
- [24] H. Ryu *et al.*, “Equivariant descriptor fields: SE(3)-equivariant energy-based models for end-to-end visual robotic manipulation learning,” in *The Eleventh International Conference on Learning Representations (ICLR)*, 2023.
- [25] —, “Diffusion-EDFs: Bi-equivariant denoising generative modeling on SE(3) for visual robotic manipulation,” *arXiv preprint arXiv:2309.02685*, 2023.
- [26] H. Huang *et al.*, “Fourier transporter: Bi-equivariant robotic manipulation in 3d,” *arXiv preprint arXiv:2401.12046*, 2024.
- [27] J. Seo *et al.*, “SE(3)-equivariant robot learning and control: A tutorial survey,” *arXiv preprint arXiv:2503.09829*, 2025.
- [28] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 1994.
- [29] K. M. Lynch and F. C. Park, *Modern robotics*. Cambridge University Press, 2017.
- [30] F. Ferraguti *et al.*, “A tank-based approach to impedance control with variable stiffness,” in *2013 IEEE international conference on robotics and automation*. IEEE, 2013, pp. 4948–4953.
- [31] K.-k. Lee and M. Buss, “Force tracking impedance control with variable target stiffness,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 6751–6756, 2008.
- [32] F. Bullo and R. M. Murray, “Tracking for fully actuated mechanical systems: a geometric framework,” *Automatica*, vol. 35, no. 1, pp. 17–34, 1999.
- [33] N. P. S. Prakash *et al.*, “Deep geometric potential functions for tracking on manifolds,” in *2024 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2024, pp. i–viii.
- [34] —, “Variable impedance control using deep geometric potential fields,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 58, no. 28, pp. 480–485, 2024.
- [35] T. Lee *et al.*, “Geometric tracking control of a quadrotor uav on se (3),” in *49th IEEE conference on decision and control (CDC)*. IEEE, 2010, pp. 5420–5425.