

将互补约束与控制障碍函数统一用于安全的全身机器人控制

Rafael I. Cabral Muchacho¹, Riddhiman Laha², Florian T. Pokorny¹, Luis F.C. Figueredo^{2,3}, and Nilanjan Chakraborty⁴

Abstract—对安全关键的全身机器人控制要求反应方法，以确保实时避碰。互补性约束和控制屏障函数（CBF）已经成为确保这些安全约束的核心工具，每个领域都得到了充分的发展。尽管它们解决了类似的问题，二者之间的联系仍然大多尚未被探索。本文通过正式证明在采样数据的一阶系统的单个和多个约束场景中，这两种方法的等价性来弥合这一差距。通过证明这种等价性，我们提供了对这些技术的统一视角。这种统一具有理论和实际意义，有助于在互补性和 CBF 框架之间交叉应用鲁棒性保证和算法改进。我们讨论了这些协同效益，并鼓励在更一般的情况下比较这些方法的未来工作。

Index Terms—Autonomous Robots, Optimal control, Constrained control, Robotics.

I. 介绍

在全身机器人控制中，安全保证通常需要严格避免碰撞和约束违反，包括距离阈值、操作器约束、输入约束和其他要求 [1]–[3]。两个在形式化安全关键规划和闭环动态控制中表现出显著效果的著名数学框架是基于互补的方法 [4]–[7] 和控制障碍函数（CBFs） [8]–[10]。对于反应性行为，这两种表达形式都通过一个在线优化程序确保约束满足。

虽然两种方法都涉及相似的安全性和控制方面，但它们的研究发展主要是平行发展的。因此，这两个框架之间的重要联系仍未被探索，包括它们潜在的数学结构和等价性的方面。我们旨在通过研究安全全身机器人控制的案例来揭示这两种方法之间的关系，在这种情况下，遵循采样数据系统中的一阶动力学，以避免碰撞。

我们的主要贡献是在采样数据一阶闭环系统情况下，对互补方法与整体机器人控制的 CBF 进行形式分析和证明其等价性。在建立这种等价性时，我们的目标不仅仅是理论方面。实际益处包括算法改进的传递、已建立的稳健性和安全边际的转移，以及现有求解器的跨应用。最后，我们提供了一个数值例子进行验证，并强调了双向方法中的重要联系。

本文的其余部分组织如下。在第 ?? 节概述相关工作之后，第 II 节介绍了符号和安全全身机器人控制的问题。第 III 节描述了补充性和 CBF 方法作为安全控制的预备工作，以便进行形式比较。我们的主要结果在第 IV 节中给

出，并在第 V 节中通过一个数值例子验证。最后，第 VI 节提供了一些最终结论和未来工作的方向。

在整个身体安全控制的背景下，构建通过设计确保安全的动态系统至关重要。换句话说，数学工具应正式保证无碰撞运动。动态环境中尤其需要这样的工具，这些环境需要反应性的方法。设计策略包括基于互补方法 [4], [7] 和 CBF 方法 [8], [9]，以及其他方法 [11]–[13]。本文着重于局部方法，这些方法优先考虑整个机器人表面上的避免碰撞，而非轨迹跟踪或目标收敛。

基于互补性的算法长期以来在控制理论和机器人学中被用来处理非平滑约束，例如，刚性接触、输入界限和计算动力学 [14]–[16]。从控制的角度来看，线性互补性约束可以被视为分段仿射条件，自动地基于接触状态或距离阈值激活或停用约束，从而确保每一步的安全行为。具体来说，带有互补性约束的优化问题用于表示刚体接触的非“粘合”方式（非渗透） [17]，并且可以高效解决 [18]–[21]。这些方法反过来又激发了在线性互补问题（LCP）的有效合规控制中的使用，例如，在移动机器人避障 [6]、安全的全身机器人控制 [7] 和运动规划扩展中 [4], [5]。

另一方面，控制屏障函数 [8]–[10] 根植于类似李雅普诺夫的前向不变论证。在特殊情况下，CBF 可被转化为凸二次规划，这又在运行时解决以实施对状态的约束，并保持系统轨迹在安全集合内。通过 CBF 的无碰撞控制在复杂闭环机电系统的背景下已经被广泛使用 [8]。对于像机械臂这样连接的系统来说，已经提出了屏障型方法以在运动学 [22]，以及动力学水平 [23], [24] 上维持安全。关键的结论是，在机器人配置空间中可以定义一个安全集，为结果的无碰撞轨迹提供安全保证而无需连续重新规划。此外，CBF 方法还被应用于涉及人机物理协作的任务 [25], [26]，其中核心思想是设计一个不仅依赖于系统状态还依赖于时间的函数。 [27], [28] 的作者研究了一个类似的想法来处理操作空间约束，包括作为 CBF 约束的避障。对于在连接机器人背景下 CBF 作为安全避碰工具更详细的教程式使用，我们建议感兴趣的读者参考 [29]。

II. 预备知识

我们首先考虑完全驱动的系统

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

，其中具有 n 维关节状态 $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ 和控制输入 $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ 。设状态约束由标量函数 $h_j \in \mathcal{C}_{loc}^1$ 描述，即具有局部 Lipschitz 的一级导数，

$$h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

每一个定义约束 $h_j(\mathbf{q}) \geq 0$ 。安全集 Ω 由零超水平集

$$\Omega := \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{Q} : h_j(\mathbf{q}) \geq 0 \text{ for all } j \right\}, \quad (3)$$

This work was partially supported by the Wallenberg AI, Autonomous Systems and Software Program (WASP) funded by the Knut and Alice Wallenberg Foundation, and by StMWi Bayern (Project X, grant no. 5140951).

¹ Division of Robotics, Perception and Learning, KTH Royal Institute of Technology, Sweden. Email: ricm@kth.se, fpokorny@kth.se. ² Munich Institute of Robotics and Machine Intelligence, TUM, Germany. Email: riddhiman.laha@tum.de. ³ School of Computer Science, University of Nottingham, UK. Email: luis.figueredo@ieee.org. ⁴ Department of Mechanical Engineering, Stony Brook University, NY, USA. Email: nilanjan.chakraborty@stonybrook.edu

给出, 其中梯度 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} h_j(\mathbf{q})$ 在边界上局部 Lipschitz 连续且非退化,

$$\begin{aligned} \partial\Omega &:= \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \mid h_j(\mathbf{q}) = 0, \exists j \in [1, \dots, m]; \\ &\quad h_i(\mathbf{q}) \geq 0, \forall i \in [1, \dots, m] \setminus j\}. \end{aligned} \quad (4)$$

我们将 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ 称为约束函数的 (列) 向量。

A. 安全整体机器人控制的约束

我们专注于安全的全身机器人控制任务。这里的目标是让机器人按照运动策略行进, 同时避免机械手连杆与环境中的障碍物发生碰撞。为此, 可以将约束函数 h_i 定义为机器人第 i 个连杆与任务空间中的障碍物集合之间的最小距离。让点 $\mathbf{p}_{c,i}$ 为连杆表面上最接近相应障碍物表面点 $\mathbf{p}_{o,i}$ 的点, 则 $h_i(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p}_{c,i} - \mathbf{p}_{o,i}\|$ 。配置的映射由 $\mathbf{f}_{c,i}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 给出, 其中 d 是任务空间的维度, $\mathbf{J}_{c,i}$ 是接触雅可比矩阵。由于欧几里德距离函数的梯度与单位法线 $\mathbf{n}_i$ 一致, 我们通过链式法则得到

$$\frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{p}_{c,i}} = \frac{\mathbf{p}_{c,i}^T - \mathbf{p}_{o,i}^T}{\|\mathbf{p}_{c,i} - \mathbf{p}_{o,i}\|} = \mathbf{n}_i^T, \quad \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{n}_i^T \mathbf{J}_{c,i}. \quad (6)$$

Remark 1. 到非凸形状的距离函数几乎总是处于 $\mathcal{C}_{loc}^1$ 。虽然在实际中这不是一个限制, 但可以通过将环境和操作器表示为任意精度的球的并集来获得一个有效的理论构建。然后, 可以为每对球定义约束条件 h_i , 并确保每个约束条件都是 $\mathcal{C}_{loc}^1$ 。作为球基表示的替代方法, 还可以利用 $\mathcal{C}_{loc}^1$ 的欧几里德距离松弛来处理非凸对象 [30]–[32]。

所提出的全身安全约束可以通过下面描述的方法用于快速变化环境中的安全和反应性机器人控制。

III. 安全控制方法

为了跟踪期望的末端执行器轨迹, 通常通过微分逆运动学由关节速度给出一个名义输入轨迹。为实现机器人的安全全身控制, 通常采用两种方法: (i) 补充性方法, 这些方法被公式化为具有线性互补约束的二次规划 (LCQP), 以及 (ii) 通过控制障碍函数的保持不变性方法。在本节中, 我们总结了这些方法并将其简化为原始形式, 为它们的比较做准备。

A. 基于互补性的方法

互补性约束是由

$$0 \leq a \perp b \geq 0, \quad (7)$$

表示的非线性和非凸约束, 这些约束代表了

$$0 \leq a \wedge ab = 0 \wedge b \geq 0. \quad (8)$$

。这种形式的约束已成功用于表示接触动力学, 如在 [17], [33], [34] 中, 并激发了用于机器人操纵器的安全运动动力学和整体控制的方法 [4], [7]。

通过互补约束, 整体碰撞避免中的目标行为可以表示为一个切换系统, 当距离函数超过预定义的阈值时, 补偿接触的速度被限制为零 [6], [7]。在数学上, 这种切换机制由互补条件描述,

$$0 \leq \lambda_i \perp h_i - \delta_{LC,i} \geq 0, \quad (9)$$

其中 i 索引特定的连杆和障碍物对, $\delta_{LC,i}$ 表示安全阈值。在这里, 术语 $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$ 作为运动单位法向量 $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^d$ 的缩放因子。

互补性约束在下一时间步通过一阶近似和时间步 τ 进行评估, 从而得到微分互补问题 (DCP) 公式

$$h_i(\mathbf{q}_{t+\tau}) \approx h_i(\mathbf{q}_t) + \tau \dot{h}_i(\mathbf{q}_t) \quad (10)$$

$$0 \leq \lambda_i \perp h_i(\mathbf{q}_{t+\tau}) - \delta_{LC,i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \mathbf{h}(\mathbf{q}_{t+\tau}) - \boldsymbol{\delta}_{LC} \geq \mathbf{0}. \quad (12)$$

利用先前的定义和 $\mathbf{J}_{c,i}^\dagger \mathbf{n}_i = (\mathbf{n}_i^T \mathbf{J}_{c,i})^\dagger$, 其中 $\dagger$ 表示 Moore-Penrose 逆, 可以将配置空间中的速度 (输入) 参数化为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{des}} + \sum_{i=1}^m \mathbf{J}_{c,i}^\dagger \mathbf{n}_i \lambda_i \quad (13)$$

为了将政策以矩阵-向量形式提供, 我们定义了运算符

$$\mathbf{G}: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{G}: \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}_1^\dagger \dots \mathbf{x}_m^\dagger], \quad (14)$$

, 其中每个 $\mathbf{x}_i^\dagger$ 是 i 行 $\mathbf{x}_i$ 的 Moore-Penrose 逆矩阵 $\mathbf{x}$ 。使用运算符 $\mathbf{G}$, 现在

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{des}} + \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right) \boldsymbol{\lambda}. \quad (15)$$

。最后, 我们在线性互补性约束下定义状态相关的可行集合

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{LC} &= \{\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{des}} + \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right) \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \\ &\quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \mathbf{h} + \tau \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}_{LC} \geq \mathbf{0}\}. \end{aligned} \quad (16)$$

。可以将优化问题表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{LC,k}^* &= \arg \min_{\mathbf{u}_k} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{\text{des}}(\mathbf{q}_k)\|^2 \\ \text{subject to } &\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_{LC}^{(k)}(\mathbf{q}_k), \end{aligned} \quad (17)$$

, 其中 $\mathbf{u}_k$ 是 $\boldsymbol{\lambda}_k$ 的函数。注意, 集合 (16) 的一般形式可以表述为

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{LC} &= \{\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{A}_{LC}) \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \\ &\quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \mathbf{A}_{LC} \mathbf{x} - \mathbf{b}_{LC} \geq \mathbf{0}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

, 其中包括 $\mathbf{A}_{LC} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}$ 、 $\mathbf{b}_{LC} = \frac{1}{\tau}(\boldsymbol{\delta}_{LC} - \mathbf{h}) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u}_{\text{des}}$ 和 $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{des}}$, 恢复原始集合。

B. 基于 CBF 的方法

一种相关的安全控制方法通过控制屏障函数 (CBFs) 和基于 QP 的控制 [8], [9], 以及通过向量场不等式方法 [35] 已经被开发出来。在本节中, 我们总结了 [10] 中关于采样数据或离散系统中 CBFs 的相关结果。对于控制仿射系统, CBF 理论中一个重要的结果是任何满足 Lipschitz 连续控制输入 $\mathbf{u}(\mathbf{q})$ 的

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} h_i(\mathbf{q}) \mathbf{u} + \alpha_i(h_i(\mathbf{q})) \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad \forall t \geq 0, \quad (19)$$

, 其中 α_i 是一个类- κ 函数, 会使 Ω 向前不变 [9], [10]。在 CBF 的意义上, 前向不变集描述了闭环轨迹从集合内开始, 也在所有未来时间内保持在集合内。

对于离散或采样数据系统，考虑使用时间步长为 τ 的 ZOH 控制律。满足

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} h_i(\mathbf{q}_k) \mathbf{u}_k + \alpha_i(h_i(\mathbf{q}_k) - \delta_{\text{CBF},i}) \geq 0, \quad (20)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots,$$

的 ZOH 输入轨迹在采样状态 $\mathbf{q}_k$ 时确保 Ω 的前向不变性。约束 (20) 使用来自 [10] 的物理裕度公式，即，变量 $\delta_{\text{CBF},i}$ 被设计为采样动力学的全局 Lipschitz 常数的函数，并保证底层连续系统的安全性。

在这些约束下， $\mathbf{u}_k$ 的可行集合定义为

$$\mathcal{U}_{\text{CBF}}(\mathbf{q}) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \dots, m, \right. \\ \left. \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u} + \alpha_i(h_i - \delta_{\text{CBF},i}) \geq 0 \right\}. \quad (21)$$

。该集合是凸集，因此可以将 (21) 嵌入到 QP 中，

$$\mathbf{u}_{\text{CBF},k}^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k} \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{\text{des}}(\mathbf{q}_k)\|^2 \quad (22)$$

$$\text{subject to } \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_{\text{CBF}}^{(k)}(\mathbf{q}_k).$$

。这个 QP (CBF-QP) 确保了 $\mathbf{u}_k$ 在和 m 约束 $h_i(\cdot)$ 下保持可行。

注意，集合 (21) 的一般形式可以表示为

$$\mathcal{X}_{\text{CBF}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}_{\text{CBF}} \mathbf{x} - \mathbf{b}_{\text{CBF}} \geq \mathbf{0}\}, \quad (23)$$

与 $\mathbf{A}_{\text{CBF}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}$ 、 $\mathbf{b}_{\text{CBF}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\delta}_{\text{CBF}} - \mathbf{h}) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u}_{\text{des}}$ 和 $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{des}}$ ，恢复原始集合。

IV. 解的等价性

我们通过比较对应问题的一般形式的最优解来证明问题 (22) 和 (17) 的解 $\mathbf{u}_{\text{LC}}^*$ 和 $\mathbf{u}_{\text{CBF}}^*$ 是等价的。首先，我们考虑单约束的情况，然后在定理 1 中，对结果进行形式化和泛化到多约束的情况。

A. 单约束情况

最初，我们考虑单个碰撞约束的情况，以获得直觉。其中，我们展示了在最小偏差目标下互补约束的冗余性，使用期望的关节速度 $\dot{\mathbf{q}}_{\text{des}}$ 。

LCQP 可以通过 λ 重新表述为

$$\mathbf{u}^* = \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{n} \lambda^* \quad (24)$$

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \|\mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{n} \lambda\|^2 = \arg \min_{\lambda} \|\lambda\|^2 \quad (25)$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{n} \lambda \quad (26)$$

$$0 \leq \lambda \perp h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}} \geq \delta, \quad (27)$$

，假设 $\|\mathbf{n}^T \mathbf{J}_c\| \neq 0$ 。展开互补约束，我们得到

$$0 \leq \lambda \perp h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c (\dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \mathbf{J}_c^\dagger \mathbf{n} \lambda) \geq \delta \quad (28)$$

$$0 \leq \lambda \perp h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \tau \lambda \geq \delta, \quad (29)$$

，它表示这三个约束，

$$0 \leq \lambda \quad \wedge \quad (30)$$

$$\lambda(h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \tau \lambda - \delta) = 0 \quad \wedge \quad (31)$$

$$h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \tau \lambda - \delta \geq 0. \quad (32)$$

为了证明问题的等价性，我们展示了唯一的限制约束是 (32)。仅考虑

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \|\lambda\|^2 \quad (33)$$

$$\text{s.t. } h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \tau \lambda - \delta \geq 0, \quad (34)$$

中的右侧不等式约束 (32)，这导致了一个标准的 QP 公式。根据所需的关节速度，三个不同的情况涵盖了可能的解：

$$\text{a. } h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} - \delta > 0, \implies \lambda^* = 0, \quad (35)$$

$$\text{b. } h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} - \delta = 0, \implies \lambda^* = 0, \quad (36)$$

$$\text{c. } h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} - \delta < 0, \\ \implies \lambda^* = \frac{1}{\tau}(\delta - (h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}})) > 0. \quad (37)$$

。在这三种情况下，最优解都是非负的，因此不等式约束 (30) 总是满足的。

在情况 (a.) 和 (b.) 中，由于 $\lambda^* = 0$ 的原因，等式约束 (31) 直接被满足。在情况 (c.) 中，最优的 λ 为正，这导致了 $h + \tau \mathbf{n}^T \mathbf{J}_c \dot{\mathbf{q}}_{\text{des}} + \tau \lambda^* = \delta$ ，进而也满足了 (31)。通过约束 (30) 和 (31) 显示出的冗余性，我们得出结论：问题 (24) - (27) 和 (33) - (34) 的最优解是等价的。

B. 一般情况

通过原始形式的优化问题考虑多重约束情况，我们在定理 1 中证明了最优解的等价性，这推广并形式化了单一约束的分析。

为了在两种表达形式之间进行映射，我们首先找到这两种方法中变量和参数之间的对应关系。由于 $\mathbf{A}_{\text{CBF}} = \mathbf{A}_{\text{LC}}$ ，并且

$$\mathbf{b}_{\text{CBF}} = \mathbf{b}_{\text{LC}} \iff \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\delta}_{\text{CBF}} - \mathbf{h}) = \frac{1}{\tau}(\boldsymbol{\delta}_{\text{LC}} - \mathbf{h}), \quad (38)$$

，当 $\alpha_i(x) = \tau^{-1}x$ 时，两种方法共享相应的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 变量，并且在使用相同边距 $\delta = \delta_{\text{LC}} = \delta_{\text{CBF}}$ 时也是如此。

在下面的定理中，集合 $\mathcal{X}_0$ 对应于 CBF-QP 形式，集合 $\mathcal{X}_1$ 对应于 LCQP 形式，并选择参数使得 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{LC}} = \mathbf{A}_{\text{CBF}}$ 和 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{LC}} = \mathbf{b}_{\text{CBF}}$ 。

Theorem 1 (Equivalence of Solutions). 设 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，行数为 $\mathbf{a}_i$ ，假设 $\|\mathbf{a}_i\| \neq 0$ 。使用 $\mathbf{G}$ 如同在 (14) 中一样，定义

$$\mathcal{X}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}\} \quad \text{and} \quad (39)$$

$$\mathcal{X}_1 := \{\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, 0 \leq \boldsymbol{\lambda} \perp \mathbf{A}\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}\}, \quad (40)$$

，其中 $\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{A})$ 。那么问题

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \text{and} \quad (41)$$

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_1 \quad (42)$$

具有相同的最优解。

下面的形式证明扩展了以下论点。由于问题 (41) 是凸的，相应的 KKT 条件是最优性的必要且充分条件。这些条件确保了 $\mathbf{x} \in \text{rowsp}(\mathbf{A})$ ，以及互补松弛性。由于 $\text{rowsp}(\mathbf{A}) = \text{rowsp}(\mathbf{H})$ ，因此问题 (41) 的极小化解也是问题 (42) 的一个可行且最优的解。标准参考见 [36]。

证明. 如果 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_1$, 则根据定义存在 λ , 其中

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\lambda, \quad 0 \leq \lambda \perp \mathbf{A}\mathbf{H}\lambda - \mathbf{b} \geq 0.$$

由于 $\mathbf{A}\mathbf{H}\lambda \geq \mathbf{b}$, 因此得到 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$, 所以 $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_0$.

问题 (41) 是一个具有线性约束的凸二次优化。令 $\mathbf{x}_0^*$ 是问题 (41) 的一个最优解。根据 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件, 存在 $\lambda^* \geq 0$ 使得 (原问题可行性) $\mathbf{A}\mathbf{x}_0^* \geq \mathbf{b}$, (对偶问题可行性) $\lambda^* \geq 0$, (互补松弛性) $\lambda_i^* ((\mathbf{A}\mathbf{x}_0^*)_i - b_i) = 0 \forall i$, (平稳性) $\mathbf{x}_0^* - \mathbf{A}^T \lambda^* = 0$ 。

注意, $\mathbf{A}^T \lambda^*$ 位于 $\mathbf{A}$ 的行空间内。根据 $\mathbf{a}_i^\dagger = \frac{\mathbf{a}_i^T}{\|\mathbf{a}_i\|^2}$ 的定义, 得出 $\mathbf{H}$ 将 $\mathbb{R}^m$ 映射到 $\mathbf{A}$ 的行空间。这进一步意味着 $\mathbf{A}\mathbf{H}$ 是半正定的, 并且 $\lambda'_i = \|\mathbf{a}_i\|^2 \lambda_i^*$ 与 $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{A}^T \lambda^* = \mathbf{H}\lambda'$ 。

因此,

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{H}\lambda', \quad 0 \leq \lambda' \perp \mathbf{A}\mathbf{H}\lambda' - \mathbf{b} \geq 0,$$

和任何 (41) 的最优解 $\mathbf{x}_0^*$ 都在 $\mathcal{X}_1$ 内。由于 $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_0$, 这也就意味着 $\mathcal{X}_0$ 和 $\mathcal{X}_1$ 的最小值必须相同, 即问题 (41) 和 (42) 具有相同的最优解。□

作为定理 1 的结果, 我们可以正式推广基于互补性的安全控制框架 [5] 的唯一性结果。

Corollary 1 (Convexity of Safe Control). 由于 $\mathbf{A}_{LC}\mathbf{G}(\mathbf{A}_{LC})$ 是正半定的, 描述机器人操控器速度控制碰撞避免的线性互补问题, 即 $\text{find } \mathbf{u}(\lambda) \in \mathcal{U}_{LC}$, 是凸的。此外, 对于每一个状态 $\mathbf{q}$ 和期望输入 $\mathbf{u}_{des}$, 集合 $\mathcal{U}_{LC}$ 是凸的 [37]。

C. 等价性的几何透镜

一个理解方法间等价性的有用视角是, 通过 LCQP 的线性互补性和基于 CBF 的控制器都受制于 $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ 形式的约束。这些约束可以被视为 $\bigcap_i \{\mathbf{x} : \mathbf{a}_i \mathbf{x} \geq b_i\}$, 其中每一个 $\mathbf{a}_i$ 描绘了一个约束边界的法向量——例如距离函数的梯度。因此, 与此线性约束相对应的可行集变为通过交集形成的半空间 $\mathbf{x} : \mathbf{a}_i \mathbf{x} \geq b_i$ 的多面体或多面体锥。

证明一个候选控制在两个框架下都满足这些约束是建立等价性的核心。这是通过映射 $\mathbf{H}$ 实现的。此外, 通过 (41) 或 (42) 解决定理 1 时——分别在 (39) 和 (40) 下——最小范数解 $\mathbf{x}^*$ 必须与多面体的每个活动面正交, 即 $\mathbf{a}_i \mathbf{x}^* \geq b_i$ 。如果一个面是活跃的, 相应的乘数 λ_i^* 严格为正, 代表保持 $\mathbf{x}^*$ 在集合中所需的推动力。否则, λ_i 为空。在互补性和基于 CBF 的方法中, 这些乘数要么通过线性互补条件产生, 要么通过 KKT 平稳性和松弛性产生。正如定理 1 的证明中所示, 这些条件完全一致, 导致相同的正交投影通过 $\mathbf{H}$ 映射到相同的半空间交集上, 因此获得相同的最优解。

D. 讨论

虽然我们展示了针对速度控制机械臂的考虑安全的全身控制方法之间的等价性, 但我们认为这对双向研究都有利, 并激励着未来的研究。具体而言, 在这两个框架之间建立直接对应关系可以实现算法改进和理论保证的转移。

我们提出, CBF 方法受益于与更大范围问题的联系, 这些问题更接近于接触应用并使用互补约束。此外, 像 [4], [5] 中的规划应用可能对基于 CBF 的规划方法的设计有用的指导。另一方面, 成熟的 CBF 理论对于离散互补方法

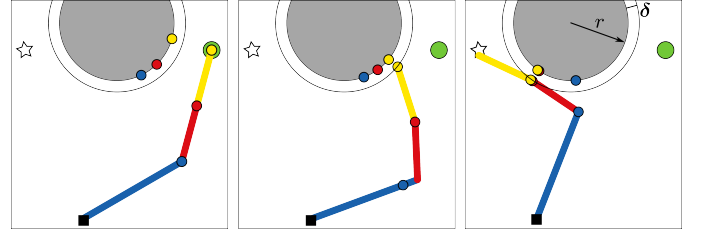


Fig. 1. 一个具有 3 自由度的平面机器人被引导从一个初始配置 (左侧) 到达一个目标位置, 其末端执行器通过星星表示。机器人遵循互补性和 QP-CBF 策略, 导致相同的路径。中间的插图显示了沿路径的一个示例配置, 右侧的插图显示了机器人到达目标时的配置。右图中描述的符号同样适用于左图和中间图。

是有帮助的, 例如, 采样数据的 CBF 也为有效的物理边界和采样时间提供了正式的说明, 这取决于系统和约束的 Lipschitz 常数 [10], 确保了基于互补的方法的安全行为。将分析扩展到更高阶动力学和其他更复杂的系统, 可以进一步建立这两种方法之间的联系。

V. 数值验证

我们通过在一个带有障碍物的模拟环境中对一个三自由度 (3-DoF) 平面串联链机器人进行数值实验来验证获得的等效结果。图 1 显示了环境以及沿无碰撞路径的一个示例机器人配置。

A. 设置

该系统以时间步长 $\tau = 5, \text{ms}$ 进行模拟。连杆长度为 $\mathbf{l} = (0.1, 0.05, 0.05)$ 。一个半径为 0.05 的单独圆盘形障碍物放置在 $(0.03, 0.170)^T$, 物理安全边界是 $\delta = 0.01$ 。机器人的底座位置在 $\mathbf{p}_{base} = \mathbf{0}$, 目标地点是 $\mathbf{p}_g = (-0.05, 0.15)^T$ 。末端执行器位置定义为 $\mathbf{p}_{ee} = \mathbf{f}_{ee}(\mathbf{q})$, 期望的关节速度由

$$\dot{\mathbf{q}}_{des} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{ee}}{\partial \mathbf{q}} \right)^\dagger \mathbf{v}_{des} \quad (43)$$

$$\mathbf{v}_{des} = k_p (\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_{ee}) \|\mathbf{p}_g - \mathbf{p}_{ee}\|^{-1}. \quad (44)$$

给出。

我们使用 quadprog 来求解 CBF-QP 公式, 并使用 fmincon 来求解 MATLAB (2024b) 中的互补问题, 依赖于解算器的标准参数和收敛容差。

由于障碍物是一个单一的圆盘, 引入了三个标量约束, 每个约束都用于强制避免一个机器人连杆与障碍物之间的碰撞。在图 1 中, 每个连杆和障碍物表面上的最接近点对以填充圆圈表示, 并共享一致的颜色。

我们定义在时间步 k 的解误差为 $e_k = \|\mathbf{u}_{LC,k} - \mathbf{u}_{CBF,k}\|$ 。每个时间步的解误差如图 2 所示; 整个轨迹上的误差统计为

$$[\min, \text{mean}, \max](e) = [1.1\text{e-}12, 1.5\text{e-}6, 1.5\text{e-}6]. \quad (45)$$

。这些值表明由这两种方法计算的解在数值求解器的容差范围内一致, 支持所声明的等价性。

经过约束简化后的值 $h' = \min(\mathbf{h}) - \delta$ 在整个运动过程中始终为正, 且为 $\min(h') = 2.0 \times 10^{-5}$ 。每个时间步的约束简化值如图 2 所示。这表明结果轨迹无碰撞并符合所施加的物理边界。

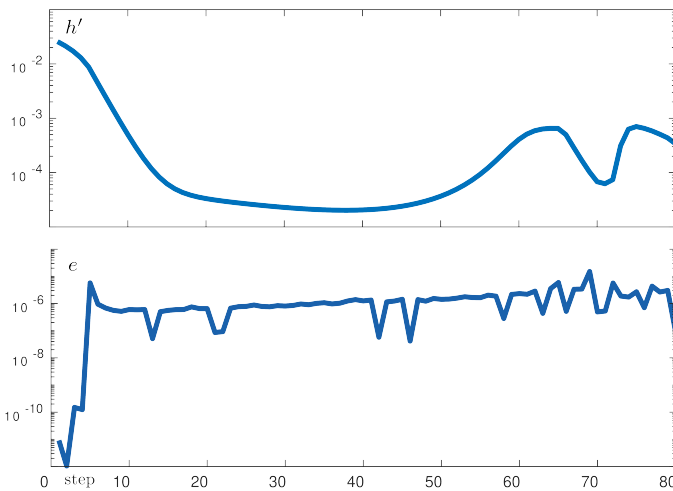


Fig. 2. 仿真每个时间步都会绘制安全约束 $h' \geq 0$ (顶部) 和解误差 e (底部)。

VI. 结论

我们描述并比较了基于 CBF 的方法和基于相补性的方案, 用于在离散时间一阶动态情况下实现安全和反应性全身机器人控制。使用冗余论点, 我们展示了在单约束情况下最优解的等价性。通过凸优化中的 KKT 论点, 我们证明了在一般多约束情况下最优解的等价性。我们认为, 这一等价性结果为通常单独使用的各个方法提供了实际和理论上的好处。这些方法可以引导出进一步的工具和见解, 从而有效地激励今后对更一般的系统和约束进行等价性分析的工作。

REFERENCES

- [1] A. Pupa, M. Arrfou, G. Andreoni, and C. Secchi, "A safety-aware kinodynamic architecture for human-robot collaboration," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 4465–4471, 2021.
- [2] R. Laha, W. Wu, R. Sun, N. Mansfield, L. F. Figueredo, and S. Haddadin, "S*: On safe and time efficient robot motion planning," in *2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2023, pp. 12758–12764.
- [3] M. Lagomarsino, M. Lorenzini, E. De Momi, and A. Ajoudani, "Pro-mind*: Proximity and reactivity optimisation of robot motion to tune safety limits, human stress, and productivity in industrial settings," *IEEE Transactions on Robotics*, 2025.
- [4] N. Chakraborty, S. Akella, and J. Trinkle, "Complementarity-based dynamic simulation for kinodynamic motion planning," in *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2009, pp. 787–794.
- [5] A. Sinha, A. Sarker, and N. Chakraborty, "Task space planning with complementarity constraint-based obstacle avoidance," in *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 85451. American Society of Mechanical Engineers, 2021, p. V08BT08A012.
- [6] A. Sinha, R. Laha, and N. Chakraborty, "Oc3: A reactive velocity level motion planner with complementarity constraint-based obstacle avoidance for mobile robots," in *2023 IEEE 19th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*. IEEE, 2023, pp. 1–8.
- [7] H. Yao, R. Laha, A. Sinha, J. Hall, L. F. Figueredo, N. Chakraborty, and S. Haddadin, "On the synthesis of reactive collision-free whole-body robot motions: A complementarity-based approach," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2025.
- [8] A. D. Ames, X. Xu, J. W. Grizzle, and P. Tabuada, "Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 8, pp. 3861–3876, 2016.
- [9] A. D. Ames, S. Coogan, M. Egerstedt, G. Notomista, K. Sreenath, and P. Tabuada, "Control barrier functions: Theory and applications," in *2019 18th European control conference (ECC)*. IEEE, 2019, pp. 3420–3431.
- [10] J. Breeden, K. Garg, and D. Panagou, "Control barrier functions in sampled-data systems," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 6, pp. 367–372, 2021.
- [11] O. Khatib, "Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots," *The international journal of robotics research*, vol. 5, no. 1, pp. 90–98, 1986.
- [12] E. Rimon, *Exact robot navigation using artificial potential functions*. Yale University, 1990.
- [13] J.-P. Aubin, *Viability Theory*. Cambridge, MA, USA: Birkhäuser Boston, 1991.
- [14] M. Posa, C. Cantu, and R. Tedrake, "A direct method for trajectory optimization of rigid bodies through contact," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 33, no. 1, pp. 69–81, 2014.
- [15] M. Zhang, D. Jha, A. Raghunathan, and K. Hauser, "Simultaneous trajectory optimization and contact selection for multi-modal manipulation planning," in *Robotics science and systems*, 2023.
- [16] M. Zhang, D. K. Jha, A. U. Raghunathan, and K. Hauser, "Simultaneous trajectory optimization and contact selection for contact-rich manipulation with high-fidelity geometry," *IEEE Transactions on Robotics*, 2025.
- [17] Q. Le Lidec, W. Jallet, L. Montaut, I. Laptev, C. Schmid, and J. Carpentier, "Contact models in robotics: a comparative analysis," *IEEE Transactions on Robotics*, 2024.
- [18] E. Mitsopoulou and I. Doudounis, "A contribution to the analysis of unilateral contact problems with friction," *Solid Mechanics Archives*, vol. 12, no. 3, pp. 165–186, 1987.
- [19] S. P. Dirkse and M. C. Ferris, "The path solver: a nonmonotone stabilization scheme for mixed complementarity problems," *Optimization methods and software*, vol. 5, no. 2, pp. 123–156, 1995.
- [20] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean, "A gauss-seidel like algorithm to solve frictional contact problems," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 155, no. 1-2, pp. 31–47, 1998.
- [21] K. Erleben, "Numerical methods for linear complementarity problems in physics-based animation," in *Acm Siggraph 2013 Courses*, 2013, pp. 1–42.
- [22] C. T. Landi, F. Ferraguti, S. Costi, M. Bonfè, and C. Secchi, "Safety barrier functions for human-robot interaction with industrial manipulators," in *2019 18th European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2019, pp. 2565–2570.
- [23] Y. Choudhary and S. Kolathaya, "Energy based control barrier functions for robotic manipulators with large safety constraints," in *2022 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2022, pp. 1328–1335.
- [24] A. Singletary, W. Guffey, T. G. Molnar, R. Sinnet, and A. D. Ames, "Safety-critical manipulation for collision-free food preparation," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 7, no. 4, pp. 10954–10961, 2022.
- [25] K. Shi and G. Hu, "Dual-mode human-robot collaboration with guaranteed safety using time-varying zeroing control barrier functions and quadratic program," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 8, no. 9, pp. 5902–5909, 2023.
- [26] S. K and G. Hu, "Safety-guaranteed and task-consistent human-robot interaction using high-order time-varying control barrier functions and quadratic programs," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 9, no. 1, pp. 547–554, 2023.
- [27] M. A. Murtaza, S. Aguilera, V. Azimi, and S. Hutchinson, "Real-time safety and control of robotic manipulators with torque saturation in operational space," in *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2021, pp. 702–708.
- [28] M. A. Murtaza, S. Aguilera, M. Waqas, and S. Hutchinson, "Safety compliant control for robotic manipulator with task and input constraints," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 7, no. 4, pp. 10659–10664, 2022.
- [29] F. Ferraguti, C. T. Landi, A. Singletary, H.-C. Lin, A. Ames, C. Secchi, and M. Bonfè, "Safety and efficiency in robotics: The control barrier functions approach," *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 29, no. 3, pp. 139–151, 2022.

- [30] Y. Li, Y. Zhang, A. Razmjoo, and S. Calinon, "Representing robot geometry as distance fields: Applications to whole-body manipulation," in *Proc. IEEE Intl Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2024, pp. 15 351–15 357.
- [31] P. Liu, K. Zhang, D. Tateo, S. Jauhari, J. Peters, and G. Chaltatzaki, "Regularized deep signed distance fields for reactive motion generation," in *2022 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2022, pp. 6673–6680.
- [32] R. I. C. Muchacho and F. T. Pokorny, "Adaptive distance functions via kelvin transformation," *arXiv preprint arXiv:2406.03200*, 2024.
- [33] B. M. Kwak, "Complementarity problem formulation of three-dimensional frictional contact," 1991.
- [34] J.-S. Pang and J. C. Trinkle, "Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with coulomb friction," *Mathematical programming*, vol. 73, no. 2, pp. 199–226, 1996.
- [35] M. M. Marinho, B. V. Adorno, K. Harada, and M. Mitsuishi, "Active constraints using vector field inequalities for surgical robots," in *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2018, pp. 5364–5371.
- [36] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [37] D. den Hertog, C. Roos, and T. Terlaky, "The linear complementarity problem, sufficient matrices, and the criss-cross method," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 187, pp. 1–14, 1993.