

A Step-by-step Guide on Nonlinear Model Predictive Control for Safe Mobile Robot Navigation

Dennis Benders*, Laura Ferranti*, and Johannes Köhler†

July 23, 2025

关键词——非线性模型预测控制，时变参考跟踪，避障，终端成分，对不确定性的鲁棒性，收缩度量

1 介绍

设计一种模型预测控制 (MPC) 方案，使移动机器人能够安全地在障碍物填满的环境中导航，是机器人技术中一个复杂但至关重要的任务。在这份技术报告中，安全性指的是确保机器人尊重状态和输入约束，同时存在干扰和测量噪声的情况下避免与障碍物碰撞。该报告提供了一种逐步实施非线性模型预测控制 (NMPC) 方案的方法，以满足这些安全要求。众多书籍和研究论文提供了关于线性 MPC (LMPC) [1, 2]、NMPC [3–7] 以及它们在各个领域中的应用 (包括机器人学 [8–11]) 的全面概述。该报告并不旨在复制这些详尽的综述，而是专注于将 NMPC 作为安全移动机器人导航的基础。目标是提供从理论概念到数学证明及实施的实用且易于理解的方法，强调安全和性能保证。这适用于希望弥合理论 NMPC 公式与现实世界机器人应用之间差距的研究人员、机器人工程师和从业者。

1.1 概述

为了在移动机器人上实施一个 NMPC 方案 (以下简称为 MPC)，必须解决几个关键组件：

- 系统建模：定义机器人的动力学、其环境以及任务目标 (第 2 节)。
- 参考跟踪：制定用于轨迹跟踪的 MPC 问题 (第 3 节)。该公式与 [12–14] 中描述的公式有关。
- 对干扰的鲁棒性：修改 MPC 公式以确保在干扰下的安全性 (第 4 节)。此公式与 [15–19] 中描述的公式相关。
- 对模型不确定性的鲁棒性：开发一种鲁棒的输出反馈 MPC 方案，以处理由扰动和测量噪声组成的模型不确定性 (参见第 5 节)。这一表述与在 [20–24] 中描述的方案相关。

每种 MPC 方案都是以结构化的方式介绍的。首先提出其公式化方法，然后讨论其理想属性。接着提供详细的数学证明，以展示这些属性是如何被满足的。这些证明依赖于特定的假设，这些假设在所提出的设计下被证明是成立的。

在本指南中，向量以粗体表示，矩阵以大写字母表示。集合 $\mathbb{R}_{[a,b]}$ 和 $\mathbb{N}_{[a,b]}$ 分别代表实数和自然数，范围从 a (包含) 到 b (不包含)。集合 A 的内部用 $\text{int}(A)$ 表示。向量的欧几里得范数和矩阵的诱导范数用 $\|\cdot\|$ 表示，而关于正 (半) 定矩阵 Q 的二次范数写为 $\|\mathbf{x}\|_Q = \sqrt{\mathbf{x}^\top Q \mathbf{x}}$ ，其中 $Q \succ 0$ 或 $Q \succeq 0$ 。下标表示时间步长、索引或两者，并且上标表示变量所属的数量。例如， $g_{j,\tau|t}^{i,o}(\mathbf{p}_{\tau|t})$ 表示参考轨迹的第 j 个避障约束，以在时间 t 求解的 MPC 问题的预测阶段 τ 的位置信息 $\mathbf{p}_{\tau|t}$ 表示。在时间 t 的预测状态输入轨迹表示为 $(\mathbf{x}_{\tau|t}, \mathbf{u}_{\tau|t})$ ，最佳解写为 $(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*)$ ，候选解为 $(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t})$ 。

2 移动机器人、环境和任务描述

名义机器人系统动力学由状态 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^x}$ 、控制输入 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n^u}$ 和利普希茨连续非线性函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 给出

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

。系统受到多面体输入和状态约束 (也称为系统约束)，描述为

$$\mathcal{Z} := \mathcal{U} \times \mathcal{X} = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n^u+n^x} \mid g_j^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]} \right\}, \quad (2)$$

*Dennis Benders and Laura Ferranti are with the department of Cognitive Robotics, Delft University of Technology, 2628 CD Delft, The Netherlands (email: { d.benders, l.ferranti } @tudelft.nl). Laura Ferranti received support from the Dutch Science Foundation NWO-TTW Foundation within the Veni project HARMONIA (nr. 18165).

†Johannes Köhler is with the Institute for Dynamic Systems and Control, ETH Zürich, CH-8092, Switzerland (email: jkoehle@ethz.ch). Johannes Köhler was supported by the Swiss National Science Foundation under NCCR Automation (grant agreement 51NF40 180545).

并且 $g_j^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = L_j^s \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} - l_j^s$, $L_j^s \in \mathbb{R}^{1 \times n^s}$, $l_j^s \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 。注意，每个输入和状态约束都有一个下界和上界。因此，总共有 $n^s = 2(n^u + n^x)$ 个系统约束。

移动机器人在有障碍物的环境中运行。为了确保 MPC 优化无碰撞轨迹，我们需要定义避障约束。在本指南中，假设避障约束被构造为可能非凸无碰撞空间的多面体内逼近。由于机器人轨迹随时间推进，这些约束应定义为 MPC 视界中的时间 t 和预测阶段 τ 的函数：

$$\mathcal{F}_{\tau|t} := \left\{ \mathbf{p}_{\tau|t} \in \mathbb{R}^{n^p} \mid g_{j,\tau|t}^o(\mathbf{p}_{\tau|t}) \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}, \tau \in [0, T], t \geq 0 \right\}, \quad (3)$$

，位置为 $\mathbf{p} = M\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^p}$ ， $g_{j,\tau|t}^o(\mathbf{p}_{\tau|t}) = L_{j,\tau|t}^o \mathbf{p}_{\tau|t} - l_{j,\tau|t}^o$, $L_{j,\tau|t}^o \in \mathbb{R}^{1 \times n^p}$ ， $l_{j,\tau|t}^o \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 。为了不失一般性，我们通过缩放约束设置 $\|L_{j,\tau|t}^o\| = 1, j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 。为了便于符号表示，如果我们谈论一般约束属性，标记避障约束为 $g^o(\mathbf{p}) = L^o \mathbf{p} - l^o$ ，如果我们谈论需要明确保留于所有约束的约束属性，则标记为 $g_j^o(\mathbf{p}) = L_j^o \mathbf{p} - l_j^o$, $j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 。

Remark 1. 障碍物避免约束 (3) 形成凸多面体集合，该集合在预测时间 τ 时刻 t 上发生变化。文献 [25] 描述了一种计算单一凸多面体的方法。在此基础上，[14] 利用了一系列多面体障碍物避免约束，在这项工作中使用。一种类似的障碍物避免约束表示方法最近在 [26] 中提出，其中这些约束是基于多项式路径段的中心偏移的椭球体，且是连续参数化且可微分的。与 (3) 相比，这使得这些方法在计算时间增加的代价下更加灵活。

移动机器人的任务是跟踪满足以下性质的参考轨迹：

Property 1. 参考轨迹

$$\mathbf{r} = [\mathbf{u}^{\top} \mathbf{x}^{\top}]^{\top} : \quad (4)$$

1. 是动态可行的：

2. 满足一个收紧的系统约束集：

$$\mathbf{r}_{t+\tau} \in \bar{\mathcal{Z}}, \quad (5)$$

其中 $\bar{\mathcal{Z}}$ 被定义为

$$\bar{\mathcal{Z}} := \bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{X}} = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n^u + n^x} \mid g_j^{r,s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]} \right\} \subseteq \text{int}(\mathcal{Z}), \quad (6)$$

，并有后续引入的函数 $g_j^{r,s}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ ；

3. 满足一个更严格的障碍避免约束集：

$$M\mathbf{x}_{t+\tau}^r \in \bar{\mathcal{F}}_{\tau|t}, \quad (7)$$

，其中 $\bar{\mathcal{F}}_{\tau|t}$ 定义为

$$\bar{\mathcal{F}}_{\tau|t} := \left\{ \mathbf{p}_{\tau|t} \in \mathbb{R}^{n^p} \mid g_{j,\tau|t}^{r,o}(\mathbf{p}_{\tau|t}) \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]} \right\} \subseteq \text{int}(\mathcal{F}_{\tau|t}), \tau \in [0, T], t \geq 0, \quad (8)$$

，以及之后引入的函数 $g_{j,\tau|t}^{r,o}(\mathbf{p}_{\tau|t})$, $j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ ；

系统收紧和避障约束的纳入旨在确保，只要真实机器人以有界误差跟踪参考轨迹，原始约束就会得到满足。

一般来说，生成满足性质 1 的参考轨迹并非易事。因此，文献 [14] 提出了一种生成此类参考轨迹的方法。

3 用于轨迹跟踪的 MPC

本节旨在介绍用于跟踪在性质 1 中定义的参考轨迹的 MPC 方案，即所谓的跟踪 MPC (TMPC)。为了说明 TMPC 的特性，第 3.1 节直接陈述了其公式。然后，我们将讨论公式中的元素及其应满足的特性，以确保移动机器人安全地在环境中导航。这是第 3.2 节的主题。在讨论完 TMPC 设计后，我们将在第 3.3 节对 TMPC 公式给出一些总结性的评论。

3.1 TMPC 公式

考虑下面的 MPC 公式，用于跟踪在性质 1 中定义的参考轨迹：

$$\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) = \min_{\mathbf{x}_{\cdot|t}, \mathbf{u}_{\cdot|t}} \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}, \mathbf{x}_{t+T}^r) + \int_0^T \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}, \mathbf{u}_{\tau|t}, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau, \quad (9a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x}_{0|t} = \mathbf{x}_t, \quad (9b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{\tau|t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\tau|t}, \mathbf{u}_{\tau|t}), \quad \tau \in [0, T], \quad (9c)$$

$$g_j^s(\mathbf{x}_{\tau|t}, \mathbf{u}_{\tau|t}) \leq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \tau \in [0, T], \quad (9d)$$

$$g_{j,\tau}^o(\mathbf{p}_{\tau|t}) \leq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}, \tau \in [0, T], \quad (9e)$$

$$\mathbf{x}_{T|t} \in \mathcal{X}^f(\mathbf{x}_{t+T}^r), \quad (9f)$$

，其中阶段成本为 $\mathcal{J}^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^r\|_Q^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^r\|_R^2$, $Q \succ 0, R \succ 0$ ，终端成本为 $\mathcal{J}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^r\|_P^2$, $P \succ 0$ 。在该公式中， Q 和 R 是调节矩阵， P 应适当地计算以确保稳定性，如章节 3.2.2 所示。(9) 的最优解记为 $\mathbf{x}_{\cdot|t}^*$ 和 $\mathbf{u}_{\cdot|t}^*$ ，其中 $\mathbf{x}_{\cdot|t}^*$ 是最优状态轨迹， $\mathbf{u}_{\cdot|t}^*$ 是最优控制输入轨迹。

以滚动时域方式应用 TMPC 问题 (9)，这意味着每隔 T^s 秒求解一次，并在每个长度为 T^s 的区间内应用最优控制输入 $\mathbf{u}_{\cdot|t}^*$ 。根据这一原则，闭环系统的控制律在 $t = iT^s, i \in \mathbb{N}$ 中定义如下：

$$\mathbf{u}_{t+\tau} = \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \tau \in [0, T^s]. \quad (10)$$

3.2 TMPC 属性

在移动机器人上运行 TMPC（时间最优运动规划控制）的优势在于，如果 (9) 能够被解决，它就是问题的最优解。这个最优解是 (9) 的一个可行解，即满足所有约束 (9b) - (9f) 的解。此外，它还最小化了目标 (9a)。如果问题被恰当制定，机器人将通过准确跟踪参考轨迹来高效地在环境中导航。

值得注意的是，MPC 是一种轨迹优化方法。从理论上讲，人们希望为所有未来时间优化一个合适的轨迹。然而，这并不是一个可处理的问题。因此，MPC 的预测范围是有限的。为了确保使用有限的预测范围不会导致未来不可避免的不可行问题，设计了所谓的终端成分 [2]。终端成分包括终端控制律 κ^f 、终端成本 $\mathcal{J}^f$ 和终端集 $\mathcal{X}^f$ 。终端成分背后的想法是可以安全地执行附加了 κ^f 的开环 MPC 策略。这可能不是最优行为，因为 (9) 并不是每隔 T^s 秒求解，但它是可行的。如果设计得当，在 $\mathbf{u}_{[0, T]|t}^*$ 之后执行 κ^f 会使 $\mathcal{J}^f$ 成为“无限预测范围”成本的上限，而这个上限并未在 (9a) 的积分项中考虑到。此外，如果 $\mathcal{X}^f$ 被合理设计，该集合在 κ^f 下是正不变的。这意味着系统保证会留在该集合内。如您所想，终端成分对 MPC 方案的安全保证至关重要。因此，它们是 MPC 设计的中心。

上述关于终端成分的讨论适用于将系统带到平衡状态的经典稳定化 MPC 类型。最近，这一理论已经扩展到跟踪动态参考轨迹，例如在性质 1 中定义的轨迹，使它们在移动机器人部署中也十分有用。因此，所有的终端成分都以 (4) 作为输入参数。特别地，它们常用的表达式是终端控制律的

$$\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{u}^r + K(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r), \quad (11)$$

，终端成本的

$$\mathcal{J}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^r\|_P^2, \quad (12)$$

，以及终端集的

$$\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^x} \mid \mathcal{J}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) \leq \alpha^2 \right\}, \quad (13)$$

。因此， $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 包含一个前馈参考输入项和反馈增益矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n^u \times n^x}$ ，用于纠正参考状态 $\mathbf{x}^r$ 与真实状态 $\mathbf{x}$ 之间的误差。此外， $\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r)$ 是具有 $\alpha > 0$ 比例缩放的终端成本的子水平集。

Remark 2. 一般来说，反馈增益矩阵 K 可以是状态相关或时间相关的；参见 [13] 及其中的讨论。为了简化，我们在此指南中假设 K 是常数。

需要注意的是，不能直接实施 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 。相反，MPC 方案是以递归预测的方式来实施的，就如同 (10) 所示。这意味着控制动作会在 $t = iT^s, i \in \mathbb{N}$ 时重新计算，并在 $[iT^s, (i+1)T^s], i \in \mathbb{N}$ 期间应用。实践中可能出现的一个问题是 TMPC 问题 (9) 在某个时刻变得不可行。例如，这种情况发生在求解器遇到数值问题时。意味着求解器无法找到满足所有约束的解。在这种情况下，机器人没有已知的控制动作可采取。为防止这种问题，TMPC 的表述应该满足递归可行性属性。该属性确保在 t 时找到 (9) 的可行解的情况下，也能够再在 $t + T^s$ 时构建一个可行解，而不需要重新求解优化问题，以使在所有未来时刻里 (9) 中的约束得到满足。递归可行性被认为是确保移动机器人安全部署的必要条件。

Remark 3. 在动态环境中，约束可能会随时间变化。这可能会破坏递归可行性属性，因为之前由 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 附加的最优解不一定满足更新的约束。这并不意味着渐近视野 MPC 实施在每个时间步不会找到最优解。这意味着我们不能保证总是存在可行解。因此，为了证明在此类环境中的安全性，必须对环境做出假设。

例如，只要机器人的轨迹能够很好地预测，移动的障碍物就会避开机器人。另一种可能更标准的假设是存在已知的集合，能够随时间 [16] 过度逼近动态障碍物。后者的假设通常仅限于具有可预测物体运动的结构化环境或者导致保守的计划。较不保守的运动计划是在更普遍采用的方法中构建的，比如随机 MPC，例如 [27]。这些方法基于未来物体轨迹预测，在动态环境中规划到达某一风险水平的安全轨迹。然而，这些方案的安全性保证水平降低。

考虑到 TMPC 的退化视界实现，还需要证明的是，即便预测的状态在预测视界中可能会更接近参考轨迹，闭环机器人状态仍然会收敛到参考轨迹。我们称之为轨迹跟踪特性。

需要注意的是，上述指定的终端成分的存在一般来说不是保证的。我们将在后续部分展示如何设计它们。目前，我们假设它们存在。这便有了以下假设：

Assumption 1 (Terminal ingredients). 存在控制律 (11)，具有反馈矩阵 $K \in \mathbb{R}^{n^u \times n^x}$ ，终端成本 (12)，具有终端成本矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n^x \times n^x}$ ，以及终端集合 (13)，具有终端集合缩放 $\alpha > 0$ ，使得对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r)$ ，以下性质成立：采样时间 $T^s > 0$ 的

$$\mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r) \leq - \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau, \quad (14a)$$

$$(\mathbf{x}, \kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})) \in \mathcal{Z}, \quad (14b)$$

$$M\mathbf{x} \in \mathcal{F}, \quad (14c)$$

，在 t 处的最优解 $(\mathbf{x}_{|t}^*, \mathbf{u}_{|t}^*)$ 对于所有 $t \geq 0$ ，以及其使用终端控制律 (11) 的扩展版 $\mathbf{x}_{T+\tau|t}^*$ 对于 $\tau \in [0, T^s]$ ，如在第 3.2.1 节中定义。

这一假设用于完成在章节 3.2.2 和 ?? 中的轨迹跟踪和递归可行性证明。在接下来的章节中，该假设中的数量的意义将变得更加清晰。

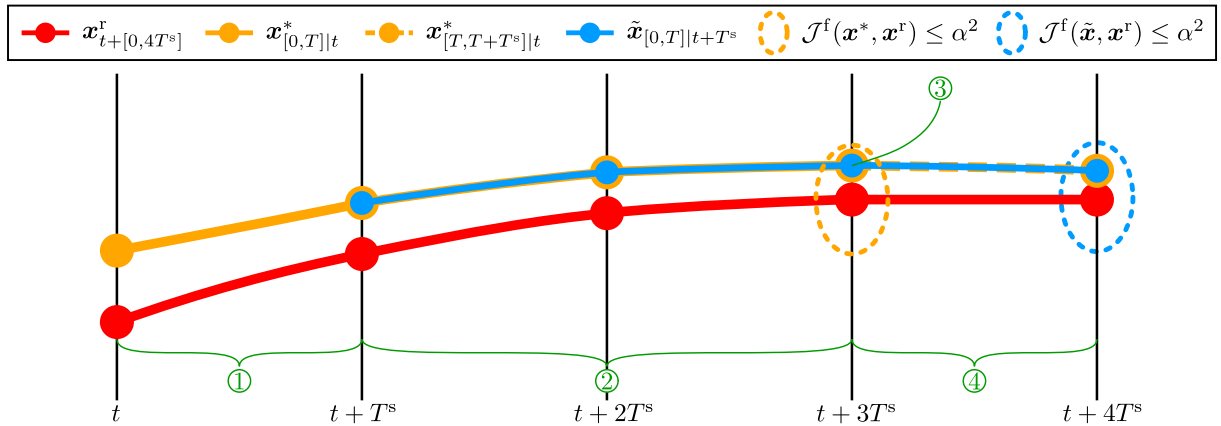


Figure 1: 一维参考轨迹 $\mathbf{x}_{t+[0,4T^s]}^r$ 、先前的最优解 $\mathbf{x}_{[0,T]|t}^*$ 、先前最优解的附加部分 $\mathbf{x}_{[T,T+T^s]|t}^*$ 、候选解 $\tilde{\mathbf{x}}_{[0,T]|t+T^s}$ 、对应于 $\mathbf{x}_{[0,T]|t}^*$ 的终端集 $\mathcal{J}^f(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^r) \leq \alpha^2$ 以及对应于候选解的终端集 $\mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^r) \leq \alpha^2$ 的可视化。在这种情况下，我们设置 $T = 4T^s$ 。注意，终端集被可视化为椭圆以明确其形状，而在这种情况下，它们应该被可视化为垂直线。

为了提前为证明提供一些直观理解，图 1 显示了在时间 t 的最优解和在时间 $t+T^s$ 的相应候选解。因此，候选解涵盖了将先前的最优解预测视界平移 T^s 的结果。递归可行性证明背后的思想是证明候选在时间 $t+T^s$ 满足所有约束 (9b) - (9f)。在间隔 ② 内，由于候选与时间 t 的最优解重叠，这些约束显然得以满足。主要要展示的是，一旦终端集合 (13) 在预测视界的结束处 t 被达到，并由 (9f) 确保，我们可以将控制律 (11) 附加到先前的最优解上，以获得一个候选解，满足系统和避障约束 (9d) 和 (9e)，以及终端集合约束 (9f)。一种简单的方法来证明递归可行性是展示控制律 (11) 使得 (13) 不变。这保证了候选满足 (9f)。此外，通过假设 ?? 中的 (14b) 和 (14c)，在终端集合 (13) 中也满足 (9d) 和 (9e)。

鉴于候选解在 $t+T^s$ 处是 (9) 的一个可行解，轨迹追踪证明需要展示候选解的成本 (9a) 低于先前的最优解，这意味着即使在 $t+T^s$ 处不重新求解 (9)，机器人也将收敛到参考轨迹。直观上，如果与区间 ④ 相关的成本，即短时间内的成本 ④，比终端成本 ③ 低，使得候选成本相比先前的最优解至少减少了成本 ①，因为成本 ② 保持不变，这种情况是成立的。这正是 Assumption ?? 中在 (14a) 中以数学形式表示的条件。

总之，确保 TMPC 公式 (9) 能导致安全有效的移动机器人部署，需要设计合适的终端成分。为此，我们在第 3.2.1 节定义了基于终端成分的候选方案，这使我们能够在第 ?? 节证明递归可行性，并在第 3.2.2 节证明轨迹跟踪。正如将会清晰看到的，假设 ?? 并不是完成证明所需满足的唯一假设。因此，第 ?? 节的目标是设计相关量，使得所有假设都得到满足，并且期望的 TMPC 属性得以保持。

3.2.1 候选解

定义候选解的目的是为了展示在时间 $t + T^s$ 时, 存在一个可行的 (不一定是最优的) 解能够满足 (9) 的要求, 前提是在 t 时成功解决了 (9)。构造这样一个候选解的简单方法是从时间 t 的最优解中选取重叠部分, 即在 t 的预测区间 $\tau \in [T^s, T]$ 中的部分, 因为该轨迹在时间 t 的 MPC 运行中已知满足所有约束条件, 并且与时间 $t + T^s$ 的 $\tau \in [0, T - T^s]$ 重叠。剩下的就是为 $\tau \in [T - T^s, T]$ 定义候选解。如果我们找到具有上述属性的 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, 那么该轨迹部分可以满足约束。

现在让我们对候选者进行数学定义。为了方便记号, 我们定义先前最优解的附加部分, 对于 $\tau \in [T, T + T^s]$, 表示为

$$\mathbf{u}_{\tau|t}^* = \kappa^f(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}), \quad (15)$$

, 其中 $\mathbf{x}_{\tau|t}^*$ 通过应用 (15) 由 (1) 给出。

给定这些定义, 我们可以将时间 $t + T^s$ 的候选写为

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t+T^s} = \mathbf{u}_{T^s+\tau|t}^*, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s} = \mathbf{x}_{T^s+\tau|t}^*, \quad \tau \in [0, T]. \quad (16)$$

该候选方案, 因此 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, 不一定在实践中实施。它仅用于证明递归可行性和轨迹跟踪。若问题不可行, 并希望机器人在部署期间继续执行开环 MPC 预测时, 才需要该控制律。然而, 在这种情况下, 控制动作不再考虑机器人状态或环境的任何变化, 这可能是危险的。在这种情况下, 最好是停下来, 查看日志以了解问题为何不可行, 并加以修正。

Remark 4. 由于候选方案可以在接下来的部分中展示出所需的递归可行性和轨迹跟踪特性, 因此只需在 $t = 0$ 解 (9) 并将候选方案应用于 $t > 0$ 即可。这种推理符合 [28] 中提出的观点: 可行性意味着稳定性。然而, 所得的控制策略在所定义的目标函数上是次优的。因此, 用户可以明确在最优性和计算效率之间进行权衡。

虽然候选解不一定在实际中实施, 但它是求解器的合适热启动, 因为它是一个可能接近最优解的可行解。为求解器提供适当的热启动对于加快求解时间至关重要, 因为求解器需要从初始点到达最优解的迭代次数更少。

为了证明递归的可行性, 我们的任务是展示候选 (16) 在时刻 $t + T^s$ 满足所有约束 (9b) - (9f)。首先, 需要注意的是, 在不了解终端成分的情况下, 候选解意味着约束 (9b) 和约束 (9c) 在 $\tau \in [0, T]$ 处是满足的。接下来我们需要证明约束 (9d) 和 (9e) 在 $\tau \in [0, T]$ 处是满足的, 以及终端集约束 (9f) 在 $\tau = T$ 处是满足的。

为了证明对于 $\tau \in [0, T]$ 约束条件 (9d) 和 (9e) 得到了满足, 我们将这个区间分成半开区间 $\tau \in [0, T - T^s)$ 和闭区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 。

系统约束满足条件对于 $\tau \in [0, T - T^s)$

让我们从 $\tau \in [0, T - T^s)$ 的证明开始。在这个区间内, 系统约束 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 满足以下条件:

$$g_j^s(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t+T^s}) \stackrel{(16)}{=} g_j^s(\mathbf{x}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{u}_{T^s+\tau|t}^*) \stackrel{(9d)}{\leq} 0. \quad (17)$$

对于 $\tau \in [0, T - T^s)$ 避障约束满足

类似地, 对于 $\tau \in [0, T - T^s)$ 避障约束 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 满足:

$$g_{j,\tau|t+T^s}^o(\tilde{\mathbf{p}}_{\tau|t+T^s}) \stackrel{(16)}{=} g_{j,\tau|t+T^s}^o(\mathbf{p}_{T^s+\tau|t}^*) \stackrel{(9e)}{\leq} 0. \quad (18)$$

注意, 对比于系统约束, 避障约束是时变的。因此, 我们需要对避障约束作以下假设, 以显示 $g_{j,\tau|t+T^s}^o(\mathbf{p}_{T^s+\tau|t}^*) \leq 0$ 实际上成立:

Assumption 2 (Obstacle avoidance constraints). 障碍物避让约束应满足

$$\mathbf{p}_{T^s+\tau|t}^* \in \mathcal{F}_{\tau|t+T^s}, \quad \tau \in [0, T - T^s], \quad (19a)$$

$$\mathbf{p}_{T|t}^* \in \mathcal{F}_{T|t}. \quad (19b)$$

。换句话说, 之前的最优路径 $\mathbf{p}_{T^s+\tau|t}^*$ 应该包含在应用于 $\tau \in [0, T - T^s]$ 在 $t + T^s$ 的相应约束区域 $\mathcal{F}_{\tau|t+T^s}$ 内。同样, 终端位置 $\mathbf{p}_{T|t}^*$ 应该包含在终端约束区域 $\mathcal{F}_{T|t}$ 内。后一特性确保由 (15) 给出的候选解的附加部分在时间 $t + T^s$ 满足更新后的障碍物避让约束。此特性用于展示下文的终端约束满足。我们假设“相应的”约束区域是使用之前的最优解构建的。

终端集约束对 $\tau \in [T - T^s, T]$ 的满足性接下来, 我们证明如果在时间 t 满足 (9f), 那么候选 (16) 在时间 $t + T^s$ 的预测区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 中满足 (9f)。为了这个证明, 我们利用了假设 ?? 中由 (14a) 给出的对 $\mathcal{J}^f(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r)$ 的假定减少。因此, 对于 $\tau \in [T - T^s, T]$ 成立下列条件:

$$\mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r) \stackrel{(16)}{=} \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r) \stackrel{(14a)}{\leq} \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}, \mathbf{x}_{t+T}^r) \stackrel{(9f)(13)}{\leq} \alpha^2. \quad (20)$$

系统约束满足对于 $\tau \in [T - T^s, T]$

预测区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 中系统约束 (9d) 的满足是终端集合不变量的组合的直接结果，如前一节所示，并且应用了假设 (14b) 中的 ??。

障碍物避免约束的满足对于 $\tau \in [T - T^s, T]$

类似于系统约束满足，在预测区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 中障碍物避免约束 (9e) 的满足直接源于终端集不变性的结合，如前一节所示，并在假设 ?? 中调用 (14c)。□

3.2.2 轨迹跟踪证明

类似于证明一个自治系统的稳定性，证明名义系统 (1) 在闭环控制律 (10) 下跟踪参考轨迹 (4) 遵循 Lyapunov 理论的论点。一个有用的类比是 Lyapunov 理论中的能量被捕获在一个机械系统中。在这个类比中，Lyapunov 函数描述了储存在系统中的能量。在这样的系统中，由于摩擦等耗散效应，能量会随着时间的推移而减少，这意味着 Lyapunov 函数值将会随着时间而严格减小。在 MPC 的背景下，能量基于跟踪误差，减少跟踪误差的耗散效应是闭环控制律 (10)。因此，选取 Lyapunov 函数的一个合理选择是选择 (9) 中的最优代价 $\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t)$ ，因为该代价表示预测轨迹与参考轨迹有多接近。理想情况下，我们希望最优代价随时间减小，这意味着跟踪误差收敛到零。

为了推导出关于最优成本的界限，我们遵循类似于 [3] 中候选成本标准下降证明的步骤：

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s}) \stackrel{(a)}{\leq} \int_0^T \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \quad (21a)$$

$$\stackrel{(b)}{=} \int_0^{T-T^s} \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) d\tau + \int_{T-T^s}^T \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{x}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{u}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \quad (21b)$$

$$\stackrel{(c)}{=} \int_{T^s}^T \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \quad (21c)$$

$$\stackrel{(d)}{=} \int_0^T \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \quad (21d)$$

$$\stackrel{(e)}{=} \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) - \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r) - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \quad (21e)$$

$$\stackrel{(f)}{=} \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{x}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r) + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau \quad (21f)$$

$$\stackrel{(g)}{=} \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau + \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r) + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau \quad (21g)$$

$$\stackrel{(h)}{\leq} \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau, \quad (21h)$$

其中 (a) 通过用可行但不一定最优的候选 (16) 填充 (9a) 而获得，所谓候选成本，(b) 通过在 $T - T^s$ 处分割积分项，(c) 通过填入候选 (16)，(d) 通过加减 $\int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau$ ，(e) 通过用 $\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) - \mathcal{J}^f(\mathbf{x}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r)$ 替换 $\int_0^T \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau$ ，(f) 通过巧妙地重新排列项，(g) 由 (16)，且 (h) 由假设 ?? 中的 (14a) 获得。

简单来说，假设 ?? 中的 (14a) 表明在预测区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 内，预测时刻 T 的候选增加成本应小于终端预测成本，在 t 处。如果是这样，那么候选成本 $\mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s})$ 至少比之前的最优成本 $\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t)$ 在 t 处的阶段成本对 $\tau \in [0, T^s]$ 更小。因此，即使不在时刻 $t + T^s$ 优化 (9)，而是应用候选

(16)，成本也会严格下降。鉴于最优成本 $\mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s})$ 被候选成本上界，则最优成本也会严格下降。

因此，假设 ?? 中的 (14a) 意味着

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s}) - \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) \leq - \int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau. \quad (22)$$

找到一个形成 $\int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau$ 的下界的 class- $\mathcal{K}_\infty$ 函数并不简单，这将使我们能够表明 $\int_0^{T^s} \mathcal{J}^s(\mathbf{x}_{\tau|t}^*, \mathbf{u}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau > 0$ 。因此，我们无法利用 [3] 中概述的标准 Lyapunov 论证来证明稳定性。由于收敛性证明不需要这个界，因此我们改为证明收敛性。

最优代价 (22) 的下降性质意味着

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s}) - \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) \leq -c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau, \quad (23)$$

具有常数 $c^{\mathcal{J},d} > 0$ 。通过在 (23) 中反转符号，从 0 到 t 以 $t \rightarrow \infty$ 进行这个不等式的迭代，并利用 $\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t)$ 是一致有界的这一事实，得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau \leq \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) \leq \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) < \infty. \quad (24)$$

通过应用 Barbalat 引理 [29]，我们可以得出结论，跟踪误差 $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^r\|$ 渐进收敛到零。 $\square$

这一部分将详细介绍以下设计：

避障约束设计

为了证明递归可行性，我们需要让避障约束满足假设 2。一种满足该假设的简单方法是根据先前的最优路径 $\mathbf{p}_{\cdot|t}^*$ 生成避障约束，并确保该路径也包含在相应的约束区域内。

Remark 5. 由于 TMPC (9) 将使用具有离散化动力学 [3] 的多重射击实现，我们还根据 MPC 阶段之间的分段常数段定义障碍规避约束。这意味着障碍规避约束也根据

$$\mathcal{F}_{iT^s+\tau|t+T^s} = \mathcal{F}_{iT^s|t+T^s}, \quad \tau \in (0, T^s], \quad i \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}, \quad (25)$$

被分段定义，其中 N 是离散预测阶段的数量。

终端成分设计

终端成分设计涉及计算适当组合的终端控制律 (11)、终端成本 12 和满足假设 ?? 中终端成本减少 (14a) 的终端集 (13)。该设计涉及找到适合的矩阵 P 和 K 以及常数 $\alpha > 0$ 的组合。

为了设计 P 和 K ，最近的工作 [13] 提出了一个线性矩阵不等式 (LMI)，以确保直接满足假设 ??：

$$(A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})K(\mathbf{r}))^\top P(\mathbf{r}) + P(\mathbf{r})(A(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})K(\mathbf{r})) + \sum_{j=1}^{n^x+n^u} \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}_j + (Q^\epsilon + K(\mathbf{r})RK(\mathbf{r})) \leq 0, \quad (26)$$

，且雅可比矩阵为

$$A(\mathbf{r}) := \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{r}}, \quad B(\mathbf{r}) := \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{r}}, \quad (27)$$

， $Q^\epsilon := Q + \epsilon I^{n^x}$ 和 $\epsilon > 0$ 。对应的证明见 [13]。

特别地，这个 LMI 保证了一个系统属性，称为局部增量稳定性。详细信息请参见 [30, 31]。注意， P 和 K 是基于参考轨迹的状态输入空间中的局部值 $\mathbf{r}$ 进行参数化的。这就是“局部”一词的来源。只需证明某些属性在状态输入空间的局部保持即可确保在完整状态输入空间内参考轨迹的跟踪。然而，请注意结果仅适用于终端集合缩放 α 的值足够小，以至于雅可比矩阵 (27) 足够准确地描述非线性系统行为。“增量”一词指的是我们考虑的是靠近参考轨迹演化的系统轨迹的稳定性属性。

如前所述，终端成本 (12) 是我们理想情况下想要最小化的“无限期”成本的上限。因此，目标是找到满足 LMI (26) 的最小值矩阵 $P(\mathbf{r})$ 和相应矩阵 $K(\mathbf{r})$ 。对应地，我们可以制定以下半定规划 (SDP)：

$$\min_{X, Y} \quad -\log \det X_{\min}, \quad (28a)$$

$$\text{s. t. } X(\mathbf{r}) \succeq 0, \quad (28b)$$

$$\begin{bmatrix} A(\mathbf{r})X(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})Y(\mathbf{r}) + (A(\mathbf{r})X(\mathbf{r}) + B(\mathbf{r})Y(\mathbf{r}))^\top - \dot{X}(\mathbf{r}) & \left(Q^{\epsilon \frac{1}{2}} X(\mathbf{r})\right)^\top & \left(R^{\frac{1}{2}} Y(\mathbf{r})\right)^\top \\ Q^{\epsilon \frac{1}{2}} X(\mathbf{r}) & -I^{n^x} & 0^{n^x \times n^u} \\ R^{\frac{1}{2}} Y(\mathbf{r}) & 0^{n^u \times n^x} & -I^{n^u} \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (28c)$$

$$X_{\min} \preceq X(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}},$$

，其中 $\dot{X}(\mathbf{r}) := \frac{\partial X(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{x}^r} \dot{\mathbf{x}}^r$ 和 LMI (28c) 是对 LMI (26) 进行 Schur 补和应用以下坐标变换的直接结果：

$$P(\mathbf{r}) = X(\mathbf{r})^{-1}, K(\mathbf{r}) = Y(\mathbf{r})P(\mathbf{r}). \quad (29)$$

注意， $\bar{\mathcal{Z}}$ 代表参考轨迹的连续状态输入空间。因此，SDP (28) 是半无穷的，我们需要对 $\bar{\mathcal{Z}}$ 进行网格化或凸化以求解它。为了解决 SDP，出现在雅可比矩阵 (27) 中的 $\mathbf{r}$ 中的状态和输入可以被设为零，对于那些线性出现的变量，我们可以取顶点，而非线性出现的变量需要网格化。

Remark 6. 由于生成 LMI (28c) 的计算时间可能会变得非常长，一个解决方案是使用稀疏点网格求解 (28)，并在更密集的网格上评估结果以检查结果的有效性。

给定该方法来计算 $P(\mathbf{r})$ 和 $K(\mathbf{r})$ ，剩下的唯一任务是为终端集合缩放 α 设计一个合适的值。理论上，可以设置 $\alpha = 0$ ，使得 (9f) 成为一个等式约束。然而，这不必要地限制了求解器找到解决方案。这可能导致不可行性，要么是因为满足这个等式约束的解决方案不存在，要么是因为问题在数值上不可行。因此，想法是找到一个非保守的 α 的最大值。回忆一下，(13) 是围绕参考轨迹为中心的，而参考轨迹分别满足收紧系统和避障约束 (6) 和 (8)。根据这一信息， α 只能增长到施加于原始系统和避障约束的紧缩大小。

假设参考轨迹仅受限于收紧的系统约束，并被以下多面体集约束： $\bar{\mathcal{Z}} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n^u+n^x} \mid L_j^{r,s} \mathbf{r} \leq l_j^{r,s}, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}\}$ 。收紧量等于 $l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}, \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}}, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}$ 。因此， α 可以通过求解下面的线性规划 (LP) [13] 计算出来，这在附录 A 中得到了证明：

$$\alpha^* = \max_{\alpha} \alpha, \quad (30a)$$

$$\text{s. t. } \left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \left[K(\mathbf{r})^\top I^{n^x} \right] L_j^{r,s \top} \right\| \alpha \leq (l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}), \quad (30b)$$

$$\forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}}, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (30c)$$

。当然，这个结果也可以扩展到包括避障约束。

注意，使用这个表达式，我们可以根据参考轨迹的系统约束收紧来计算 α 的值，反之亦然。因此，在完成 α 的设计之前，我们需要对系统和避障约束有更多的细节。这将在下一节中描述。

参考轨迹设计

参考轨迹需要满足收紧的系统约束 (6) 和收紧的避障约束 (8)。这些约束集需要被构建，使得根据假设 ?? 中的 (14b) 和 (14c)，在终端集合 (13) 中满足系统和避障约束。

考虑到系统约束 (2) 是连续可微的并且定义在紧致集 $\mathcal{Z}$ 上，它们是 Lipschitz 连续的。因此，我们可以将它们表示为

$$g_j^s(\mathbf{x}', \mathbf{u}') - g_j^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq c_j^s \alpha, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}, \quad (31)$$

，其中一些 $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^x}$ 和 $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n^u}$ 具有 Lipschitz 常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}$ 。因此，如果我们将参考轨迹的收缩系统约束设为

$$g_j^{r,s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq g_j^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + c_j^s \alpha, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}, \quad (32)$$

，我们在 (30b) 中得到一个严格的等式与

$$c_j^s = \left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \left[K(\mathbf{r})^\top I^{n^x} \right] L_j^{r,s \top} \right\|, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (33)$$

。

等价地，如果我们将参考轨迹的收紧障碍物规避约束的上界设为

$$g^{r,o}(\mathbf{p}) \leq g^o(\mathbf{p}) + c^o \alpha, \quad (34)$$

，我们可以用 $M^\top$ 替换 $[K(\mathbf{r})^\top I^{n^x}] L_j^{r,s \top}$ 来获得 c^o 的以下表达式：

$$c^o = \left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} M^\top \right\|. \quad (35)$$

基于该设计，我们选择一个适当的 α 值，以实现系统约束或避障约束的期望收紧程度。对于移动机器人，一个自然的选择是决定参考轨迹与障碍物之间的最大距离。我们称这个量为 $d_{\max}$ 。然后，我们知道 $c^o \alpha = d_{\max}$ ，由此得到终端集合缩放的以下表达式：

$$\alpha = \frac{d_{\max}}{c^o}. \quad (36)$$

通过求解 (28)，某些系统约束可能比其他约束更严格，从而导致可行解集为空。可以通过在 (28a) 中包括系统约束收缩常数，并将其惩罚设定为相应系统约束方向 $j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}$ 上空间的倒数来避免这一问题。

这样，可以鼓励求解器均等地收紧系统约束。利用 $\alpha = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^r\|_{P(\mathbf{r})}$ 处理系统约束 (32) 上的 Lipschitz 不等式，并根据 [32, p. 29] 进行舒尔补，得到以下线性矩阵不等式 (LMI)：

$$\begin{bmatrix} c_j^{s^2} & L_j^s \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \\ \left(L_j^s \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \right)^\top & X \end{bmatrix} \succeq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}. \quad (37)$$

此 LMI 被包含在 [14] 的 SDP 公式中。在该公式中， P 和 K 的状态和输入依赖性也被消除，因此结果在完整的状态输入空间中成立，而不仅仅是局部的。因此，可以去掉负责雅可比矩阵 (27) 的 Lipschitz 连续性的常数 ϵ 。包括状态和输入依赖性的好处是减少了保守性，即终端成本更小，终端集合更大。这导致闭环系统的跟踪误差更小。然而，增加的保守性在 [14] 中并不是一个主要问题，并导致了一个更简单的公式。

3.3 总结性意见

总之，所提出的 TMPC 方案是为由名义动态描述的移动机器人跟踪动态可行的参考轨迹提供安全保障的有效工具。该方案基于一个思想，即适当地设计终端成分会导致终端成本的严格降低和终端集合的正不变性，从而能够证明轨迹跟踪和方案的递归可行性。

注意，只有当系统从足够接近参考轨迹的初始点开始时，解算器才会找到满足终端集约束条件 (9f) 的 (9) 的可行解。

在实际操作中，物理机器人会受到可能无法建模的动态干扰。为了确保在这些干扰下安全的移动机器人导航，我们需要知道干扰对动力学的影响有多大，并在 MPC 设计中考虑这些影响。这是第 4 节的主题，其中提供了受扰机器人动力学和相应的鲁棒 MPC (RMPC) 设计。

4 具有扰动的轨迹跟踪鲁棒 MPC

本节的目标是介绍 RMPC 方案，该方案将用于跟踪在系统受到扰动时满足性质 1 的参考轨迹。系统动力学的描述在第 4.1 节中提供。与第 3.1 节类似，第 4.2 节陈述了优化问题和闭环控制定律。然后，第 4.3 节为 RMPC 建立直观认识，并解释公式中的必要元素及相关属性。最后，第 ?? 节总结了 RMPC 的公式化。

4.1 扰动移动机器人描述

干扰系统动力学由

$$\dot{\mathbf{x}} = f^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + E\mathbf{w}, \quad (38)$$

给出，其具有与标称系统 (1) 相同的性质，干扰为 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n^w}$ ，且有干扰选择矩阵 $E \in \mathbb{R}^{n^x \times n^w}$ 。从现在开始，为了区分标称系统和干扰系统，我们将分别用 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x}$ 表示标称状态和干扰状态。

通过记录数据，可以计算出一个在每个维度 $i \in \mathbb{N}_{[1, n^w]}$ 上的下界为 $\mathbf{w}_i^{\text{rec}}$ 和上界为 $\bar{\mathbf{w}}_i^{\text{rec}}$ 的边界框。我们将每个维度 i 的偏移记为 $\mathbf{w}_i^{\text{b}} := \frac{\mathbf{w}_i^{\text{rec}} + \bar{\mathbf{w}}_i^{\text{rec}}}{2}$ 。那么，以 $\mathbf{0}$ 为中心的扰动集合表示为

$$\mathcal{W} := \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n^w} \mid \mathbf{w}_i^{\text{rec}, 0} \leq \mathbf{w}_i \leq \bar{\mathbf{w}}_i^{\text{rec}, 0}, i \in \mathbb{N}_{[1, n^w]} \right\}, \quad (39)$$

，其中 $\mathbf{w}_i^{\text{rec}, 0} := \mathbf{w}_i^{\text{rec}} - \mathbf{w}_i^{\text{b}}$ 和 $\bar{\mathbf{w}}_i^{\text{rec}, 0} := \bar{\mathbf{w}}_i^{\text{rec}} - \mathbf{w}_i^{\text{b}}$ ，确保记录的扰动值全部包含在集合 $\mathbf{w}^{\text{b}} \oplus \mathcal{W}$ 中。相应地，在接下来的部分中，我们将扰动值表示为

$$\mathbf{w} := \mathbf{w}^{\text{b}} + \mathbf{w}^0 \in \mathbf{w}^{\text{b}} \oplus \mathcal{W}. \quad (40)$$

模型偏差 $\mathbf{w}^{\text{b}}$ 可以包含在标称预测模型中，以考虑下一章节中描述的扰动的静态偏移。

4.2 鲁棒模型预测控制公式

考虑以下用于跟踪参考轨迹 (4) 的 RMPC 形式:

$$\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) = \min_{\mathbf{z}_{|t}, \mathbf{v}_{|t}} \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T|t}, \mathbf{x}_{t+T}^r) + \int_0^T \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau, \quad (41a)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{z}_{0|t} = \mathbf{x}_t, \quad (41b)$$

$$s_\tau = 0, \quad (41c)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\tau|t} = f(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}) + E\mathbf{w}^b, \quad \tau \in [0, T], \quad (41d)$$

$$\dot{s}_\tau = -\rho s_\tau + \bar{w}, \quad \tau \in [0, T], \quad (41e)$$

$$g_j^s(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}) + c_j^s s_\tau \leq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \tau \in [0, T], \quad (41f)$$

$$g_{j,\tau}^o(M\mathbf{z}_{\tau|t}) + c^o s_\tau \leq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}, \tau \in [0, T], \quad (41g)$$

$$(\mathbf{z}_{T|t}, s_T) \in \mathcal{X}^f(\mathbf{x}_{t+T}^r), \quad (41h)$$

, 其中阶段成本为 $\mathcal{J}^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^r\|_Q^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{u}^r\|_R^2$, $Q \succ 0, R \succ 0$, 终端成本为 $\mathcal{J}^f(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^r\|_P^2$, $P \succ 0$ 。在此形式中, Q 和 R 是调节矩阵, 而 P 应该适当地计算以显示实际的渐进收敛, 详见第 ?? 节。请注意名义系统动态 (41d) 中包含模型偏差 $\mathbf{w}^b$, 使得该模型最好地描述了最小和最大扰动界限。

类似于 3 节的 TMPC 公式, RMPC 公式应用于递推时域方式。在这种情况下, 闭环系统的控制律对 $t \geq 0$ 定义如下:

$$\mathbf{u}_{t+\tau} = \kappa(\mathbf{x}_{t+\tau}, \mathbf{z}_{\tau|t}^*, \mathbf{v}_{\tau|t}^*) := \mathbf{v}_{\tau|t}^* + \kappa^\delta(\mathbf{x}_{t+\tau}, \mathbf{z}_{\tau|t}^*), \quad \tau \in [0, T^s], \quad (42)$$

具有控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$, 包括反馈律 $\kappa^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$, 该反馈律将根据本节提供的设计稍后定义。

4.3 RMPC 性质

如果标称系统 (1) 受到可预测的干扰, 我们可以调整 (1) 以包含相应的干扰动态, 并应用上一节描述的 TMPC。然而, 通常情况下, 干扰是不可预测或仅部分可预测的。可预测的部分可以通过基于学习的方法学习, 例如高斯过程, 参见例如 [33–35]。然而, 几乎在所有情况下, 将会有一部分动态是无法预测的。在这种情况下, 我们仍然需要能够保证在机器人上运行我们的 MPC 方案是安全的。

那么为什么不执行来自第 3 节的 TMPC 并寄希望于它呢? 让我们考虑一种情景, 其中参考轨迹是使用与 TMPC 相同的约束计算的。在某个时刻 t , 状态可能正好与参考状态重合, 即 $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^r$ 。然而, 最坏情况的扰动发生在区间 $[t, t + T^s]$ 内。这导致状态超出了约束边界。突然间, 问题变得不可解, 而且没有结构化的方法可以恢复, 即在开环中不存在一个适当的候选解决方案。从上述分析可以得出结论, 如果参考轨迹生成时距离约束足够远, 即 $c_j^s \alpha, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 或 $c^o \alpha$ 的收缩程度足够大, 我们可以防止此问题的发生。这正是 [14] 中利用 TMPC 方案在真实机器人上进行的实验取得成功的确切原因, 尽管有明确的鲁棒设计: 距离 $d_{\max}$ 到障碍物规避约束的距离调整得足够好, 以避免障碍物并确保在存在扰动的情况下系统的约束始终得到满足。

然而, 这还不是完整的故事。考虑一种情况, 其中参考轨迹生成得足够远离约束边界。我们再次考虑正面的情形, 即 $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^r$ 。在 t , TMPC 将根据动态 (1) 做一个标称预测, 并在闭环中执行控制律。然而, 在时间间隔 $[t, t + T^s]$ 内, 最坏情况的扰动影响了系统。因此, 状态没有继续跟踪参考, 而是远离了参考。TMPC 没有预料到这一点。在时间 $t + T^s$, TMPC 又从受扰状态的最后一个接收到的样本预测一个标称轨迹, 并优化。在时间间隔 $[t + T^s, t + 2T^s]$ 执行最佳输入时, 系统将再次朝向参考轨迹移动。因此, 即使没有显式考虑扰动, TMPC 可能仍然能够跟踪 (4)。当然, 跟踪并不完美, 但至少系统保持在接近参考轨迹的范围内。TMPC 的这种反馈特性称为固有鲁棒性 [36]。这是大多数实际的 MPC 实现所依赖的特性, 可能足以跟踪参考轨迹。

仅靠固有的鲁棒性可能不足以确保机器人的安全。例如, 在 $[t + T^s, t + 2T^s]$ 期间, 另一个扰动可能会影响系统, 尽管 MPC (模型预测控制) 的最佳控制努力, 该扰动仍可能使系统进一步偏离参考轨迹。在这种情况下, 闭环系统被称为不稳定, 换句话说, MPC 不够“强壮”以减弱扰动的影响。这种强度的概念通常被称为收缩性。换句话说, 实际轨迹与参考轨迹的差异应以最低的速度收缩。实际系统与参考轨迹的接近程度取决于收缩率, 通常用 ρ 表示, 以及扰动的最坏影响, 通常用 $\bar{w}$ 表示。这些是在 RMPC (鲁棒模型预测控制) 公式 (41) 中也可以找到的量。

一种常见的方法是通过设计一个以比 MPC 采样频率更高频率执行的反馈律来提高 MPC 的干扰衰减能力, 并确保闭环系统保持在参考轨迹附近。这样, 干扰的影响可以在 MPC 于离散采样时刻进行处理之前就被减弱。类似于设计使终端集 (13) 不变的终端控制律 (11), 可以设计反馈律以使所谓的围绕参考轨迹的不变管对干扰不敏感。这构成了一类流行的鲁棒模型预测控制 (RMPC) 方法的基础: 管状 MPC [18, 37–39]。

管状 MPC 的设计是通过一个刚性管状尺寸来收紧所有约束，从而使得如果标称预测轨迹满足收紧后的约束，那么闭环系统就能满足实际约束。具体来说，在管状 MPC 中，整个预测轨迹都被优化，包括初始状态约束 (41b)。这增加了计算复杂性，但为终端集合 [40] 提供了一个简单的表达式。

管状 MPC 方案设计的核心是找到合适的管道表达式。一种常见的方法是设计反馈律 $\kappa^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ，使增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的子层集合在由闭环控制律 (42) 作用的系统受到干扰时不变。如果系统满足以下假设 [30, 41]，则在 $\kappa^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 和 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 中存在这种反馈律的组合：

Assumption 3 (Incremental stabilizability). 存在一个反馈律 $\kappa^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$ ，一个增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，它是连续可微的并满足 $V^\delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0, \forall \mathbf{z} \in \mathcal{X}$ ，参数 $c^{\delta,1}, c^{\delta,u}, \rho > 0$ ，以及 Lipschitz 常数 $c_j^s > 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 $c^o > 0$ ，使得以下性质对所有 $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ 成立：

$$c^{\delta,1} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \leq V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq c^{\delta,u} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2, \quad (43a)$$

$$g_j^s(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - g_j^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq c_j^s \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \quad (43b)$$

$$g^o(M\mathbf{x}) - g^o(M\mathbf{z}) \leq c^o \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}, \quad (43c)$$

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq -2\rho V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (43d)$$

，其中 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b$ 和 $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ 。此外，以下类范数不等式成立 $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^{n^x}$ ：

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)} \leq \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} + \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}. \quad (44)$$

。换句话说，我们希望找到一个平方增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ，用于量化受干扰轨迹 $\mathbf{x}$ 和名义或参考轨迹 $\mathbf{z}$ 之间的差异。 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 由 (43a) 下界和上界，根据 (43d) 至少以速率 2ρ 收缩，并满足类似范数的不等式 (44)，这样系统和避障约束由一个常数乘以 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的 sqrt 进行 Lipschitz 有界。上面方程的含义和目的将在本节稍后更清楚地阐明。

Remark 7. 上标 δ 表示 Lyapunov 函数的增量性质，即 Lyapunov 函数描述了两个时变轨迹 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{z}$ 之间的差异，这两个轨迹彼此接近。

Remark 8. 在将假设中表达式 ?? 与 [31, Ass. 1] 进行比较时，注意 V^δ 包含的参数数量不同。一般来说，可以构造一个 V^δ ，它也依赖于标称输入 $\mathbf{v}$ 。然而，在此我们并没有利用这一性质，为了书写的方便，将额外的参数省略掉。

因此，如果我们可以对 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 进行上界限制，我们就可以利用 (43b) 和 (43c) 来收紧系统和避障约束，从而确保控制律 (42) 的开环执行保证真实系统轨迹 $\mathbf{x}$ 满足非收紧的约束。

注意，将 sqrt 算子应用于 (43d)，可以得到 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 的导数的以下上界：

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \leq -\rho \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}. \quad (45)$$

这个上界对 $t, \tau \geq 0$ 的演化为

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_{t+\tau}, \mathbf{z}_{t+\tau})} \leq e^{-\rho\tau} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)}. \quad (46)$$

换句话说，如果轨迹 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{z}$ 互相偏离，它们将根据 (46) 随着时间收缩。因此，误差

$$\boldsymbol{\delta} := \mathbf{x} - \mathbf{z} \quad (47)$$

指数收敛到零。如上所述，如果扰动作用于系统，情况则不然。因此，我们希望找到一个表达式来描述涉及扰动 $\mathbf{w}$ 影响的 (45)。为此，首先定义以下性质，它符合扰动集 (39) 的定义：

Property 2. 存在一个常数 $\bar{w} > 0$ ，使得对于任何 $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ 和任何 $\mathbf{w} \in \mathbf{w}^b \oplus \mathcal{W}$ ，都有

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \leq -\rho \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} + \bar{w}, \quad (48)$$

，其中 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}$ 和 $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ 。

因此，如果我们将 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 的上界，也称为管道大小，记为 s ，即，

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \leq s, \quad (49)$$

我们可以将 s 的随时间变化的导数写为

$$\dot{s} = -\rho s + \bar{w}. \quad (50)$$

重新将 (50) 写成时间函数为

$$s_t = (1 - e^{-\rho t}) \frac{\bar{w}}{\rho}, \quad (51)$$

当极限 $t \rightarrow \infty$ 达到时, 结果为最大管道大小

$$\bar{s} = \frac{\bar{w}}{\rho}. \quad (52)$$

因此, s 不会无限增长, 得到的管道大小 (52) 适合在管道 MPC 公式中收紧约束条件。

在这项工作中, 我们并没有利用管状 MPC, 而是使用了一个略有不同的变体: 约束收紧 MPC [15, 42–44]。这是 (41) 中使用的公式。约束收紧 MPC 的思想是在当前时间点 t , 与管状 MPC 不同的是, 初始预测状态 $z_{0|t}$ 等于测量状态 x_t (41b), 并且初始管道大小设为零 (41c)。从那里开始, 给出一个适当设计的闭环控制律 (42), 预测的不确定性根据 (50) 增长, 反映在 (41e) 中, 具有收缩率 ρ 和最坏情况下的扰动影响 $\bar{w}$ 。增长的管道大小用于在 (41f) 中收紧系统约束, 使用系统约束收紧常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$, 以及障碍物回避约束 (41g), 使用障碍物回避约束收紧常数 c^o 。由于管道大小不会无限增长, 如 (52) 中所示, $\bar{s}$ 可以用于构建终端集约束 (41h), 以使系统在给出适当终端控制律时, 在所有未来时间内保持在终端集中。

Remark 9. 如后所示, $\bar{s}$ 可用于收紧参考轨迹的约束, 类似于在 TMPC 部分使用终端集缩放 α 来收紧参考轨迹的约束。

类似于第 3.2 节, 我们需要对终端成分进行假设, 以满足以下终端成本性质:

Assumption 4 (Terminal ingredients). 存在一个终端控制律 $\kappa^f(x, r) : \mathcal{X} \times \bar{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$ 和终端成本 $\mathcal{J}^f(z, x^r) : \mathcal{X} \times \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得以下性质对所有 $z \in \mathcal{X}$ 成立:

$$\mathcal{J}^f(z_{T^s+T|t}^*, x_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(z_{T|t}^*, x_{t+T}^r) \leq - \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(z_{\tau|t}^*, v_{\tau|t}^*, r_{t+\tau}) d\tau, \quad (53)$$

, 采样时间为 $T^s > 0$, 最优解 $(z_{\cdot|t}^*, v_{\cdot|t}^*)$ 在 t 对所有 $t \geq 0$ 成立及其使用终端控制律 $\kappa^f(x, r)$ 在 $\tau \in [0, T^s]$ 的扩展版本 $z_{T+\tau|t}^*$, 如在第 4.3.1 节中定义。

。除了对终端控制律 $\kappa^f(x, r)$ 和终端成本 $\mathcal{J}^f(z, x^r)$ 的假设外, 我们还希望设计终端集 $\mathcal{X}^f(x^r)$, 以使在 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 中分别满足缩紧的系统和避障约束 (41f) 和 (41g), 并且使得终端控制律 $\kappa^f(x, r)$ 确保 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 的鲁棒性正不变性。 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 的紧版本的具体公式在第 ?? 节中作为证明的一部分呈现, 因此不包括在假设 ?? 中。

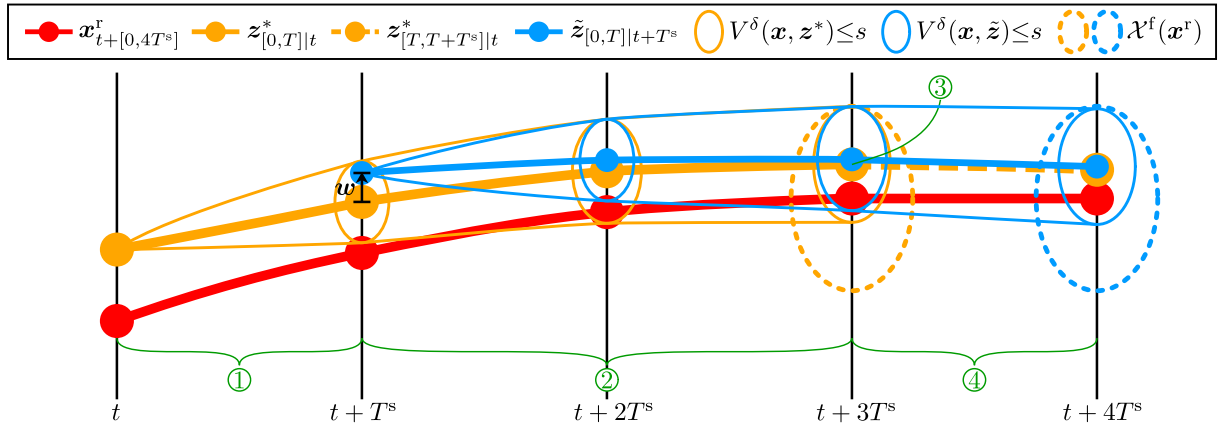


Figure 2: 可视化一维参考轨迹 $x_{t+[0,4T^s]}^r$ 、之前的最优解 $z_{[0,T]|t}^*$ 、先前最优解的附加部分 $z_{[T,T+T^s]|t}^*$ 、候选解 $z_{[0,T]|t+T^s}$ 、围绕 $z_{[0,T]|t}^*$ 的管道 $V^\delta(x, z^*) \leq s$ 、围绕 $z_{[0,T]|t+T^s}$ 的管道 $V^\delta(x, \tilde{z}) \leq s$ 以及与之前的最优解和候选解对应的围绕参考轨迹的终端集 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 。再次设置 $T = 4T^s$ 。与图 1 相比, w 影响系统在区间 ① 期间。结果, $z_{0|t+T^s} \neq z_{T^s|t}^*$ 。请注意, 这些管道和终端集被可视化为椭圆以便于清晰其形状, 而实际上在这种情况下应该被可视化为垂直线。

上述假设使我们能够证明递归可行性和轨迹跟踪。为了预先提供这些证明的直观理解, 类似于第 3.2 节, 图 2 展示了在时刻 t 的最优解以及相应的时刻 $t+T^s$ 的候选解。注意, 与 TMPC 情形相反, 我们不能简单地将先前最优解的尾部作为候选解并将其附加给预测区间 ④, 因为系统在区间 ① 中受到干扰 w 。相反, 我们在 $t+T^s$ 测量受扰状态, 并利用控制律中设计合适的反馈项将候选解引导回先前的最优轨迹。由于管道尺寸, 或等价地说, (41f) 和 (41g) 中约束的收紧, 随着时间范围的增加, 候选解在区间 ②

中的约束比先前最优解同一区间中的约束收紧得少。直观解释是，蓝色管道始终包含在橙色管道中。因此，可以证明，在候选控制律中的反馈项作用下，区间 ① 期间的干扰影响被充分收缩，以至于候选解也满足在区间 ② 中的收紧约束。同样，适当设计的终端集也是如此。此外，如果我们在区间 ④ 中附加终端控制律 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ ，其中名义项等于 $\mathbf{u}^r$ ，反馈项将候选方案引导至 $\mathbf{x}^r$ ，可以证明适当设计的终端集对于该控制律是不变的。因此，该候选方案也满足 (41h)。如果系统和障碍物约束在终端集中也得到满足，那么 (41f) 和 (41g) 在区间 ④ 上的满足性可以从终端集的不变性中直接得到。因此，在 t 的可行解意味着可以构建在 $t + T^s$ 的可行解。因此，该方案是递归可行的。

轨迹跟踪证明包括展示候选方案的成本 (41a) 低于先前最优解的成本，以得出收敛到参考轨迹的结论。在 TMPC 的情况下，我们可以证明候选成本 ④ 低于终端成本 ③，从而候选成本至少减少了成本 ①，因为成本 ② 是相同的。然而，成本 ② 是不相同的。实际上，成本 ② 和成本 ④ 都会根据最坏情况下的干扰在间隔 ① 期间的影响而增加。因此，不能得出严格收敛到参考轨迹的结论。相反，我们可以证明平均跟踪误差变小。

总之，证明 RMPC 公式化 (41) 确保在有干扰的情况下安全且高效地部署移动机器人，需要根据假设 ??，使机器人系统能够递增稳定。这意味着可以构建一个反馈控制器，以保证闭环系统相对于参考轨迹的跟踪误差可以被量化并有上限。此外，如果终端成分设计得当，满足假设 ??，并如第 4.3.1 节描述设计的候选者，我们可以在第 ?? 节证明递归可行性，并在第 ?? 节证明轨迹跟踪，平均上误差变小。递增稳定性和终端成分设计的详细信息在第 4.3.2 节中提供。

4.3.1 候选解决方案

类似于第 3.2.1 节，定义候选解的目标是为了展示在时间 t 成功解决 (41) 的情况下，在时间 $t + T^s$ 存在一个可行的但不一定是最优的 (41) 解。再者，这个候选解用于证明递归可行性和轨迹跟踪，并不一定在实际中实现。

在稳健情况下，我们选择一个与标称情况类似的候选解。为方便起见，我们针对 $\tau \in [T, T + T^s]$ 定义：

$$\mathbf{v}_{\tau|t}^* = \kappa^f(\mathbf{z}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}), \quad (54)$$

，其中 $\mathbf{z}_{\tau|t}^*$ 由 (1) 通过应用 (54) 给出。

给定这些定义，我们可以将时间 $t + T^s$ 处预测区间 $\tau \in [0, T]$ 的候选表达为

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0|t+T^s} = \mathbf{x}_{t+T^s}, \quad (55a)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}_0 = 0, \quad (55b)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} = \kappa(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*), \quad (55c)$$

，分别按照 (41d) 和 (41e) 对应于 $\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_{\tau|t+T^s}$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{s}}}_{\tau}$ 。

注意，这个候选方案与在第 3.2.1 节中的不同。主要区别在于，由于 $t + T^s$ 处的状态相对于 t 处的预测 $\tau = T^s$ 受到干扰，我们不能采取先前的最优状态-输入轨迹。因此，我们需要测量 $t + T^s$ 处的状态，并将其用作候选解的初始状态。因此，从不同状态沿着先前的最优输入轨迹 $\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \tau \in [0, T]$ 会产生不同的轨迹。因此，该解决方案不能直接使用。取而代之的是，我们添加了在假设 ?? 中描述的反馈律 $\kappa^\delta(\mathbf{x}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \tau \in [0, T])$ 。

递归可行性证明遵循与第 ?? 节中证明类似的论点，并增加了一些技术细节以考虑扰动。如前所述，第一个不同点在于 (41b) 的满足。在第 ?? 节中，我们可以直接采用之前的最优解，而在本例中，由于扰动效应 $\mathbf{w}_\tau \neq \mathbf{0}, \tau \in [t, t + T^s]$ ，状态在 $t + T^s$ 时不等于在预测时间 T^s 时的标称预测状态。因此，我们通过测量候选者在 $t + T^s$ 的扰动状态来满足这个约束，正如 (55a) 所给出的那样。

初始状态约束、初始管约束、系统动态约束和管动态约束都由 (55) 自然而然地满足。这让我们去展示在区间 $\tau \in [0, T]$ 内部，收紧后的系统约束 (41f)、收紧后的障碍避免约束 (41g) 和终端集约束 (41h) 都是得到满足的。

类似于第 ?? 节中的过程，我们将区间分成两个子区间 $\tau \in [0, T - T^s]$ 和 $\tau \in [T - T^s, T]$ ，以显示满足 (41f) 和 (41g)。

系统约束对 $\tau \in [0, T - T^s]$

的满足让我们从区间 $\tau \in [0, T - T^s]$ 的证明开始。对于这个区间，如果候选 (55) 满足以下条件，则 (41f) 满足 $\tau \in [0, T - T^s], j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ ：

$$g_j^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}) + c_j^s s_\tau \leq 0. \quad (56)$$

我们知道，对于 $\tau \in [0, T - T^s], j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ ，先前的最优解满足

$$g_j^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*) + c_j^s s_{T^s+\tau} \leq 0. \quad (57)$$

。因此，我们希望在 $g_j^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*)$ 的作用下对 $g_j^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s})$ 创建一个上界。这可以使用在控制律 $\kappa(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*)$ 下的 Lipschitz 假设 (43b) 来实现。这给出了 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 的以下上界：

$$g_j^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}) \leq g_j^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*) + c_j^s \sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)}. \quad (58)$$

。在 (56) 的左侧填入 (58) 得到对于 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 的结果：

$$g_j^s(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, \tilde{v}_{\tau|t+T^s}) + c_j^s s_\tau \leq g_j^s(z_{T^s+\tau|t}^*, v_{T^s+\tau|t}^*) + c_j^s \sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)} + c_j^s s_\tau. \quad (59)$$

。因此，满足 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 的 (56) 的充分条件如下：

$$g_j^s(z_{T^s+\tau|t}^*, v_{T^s+\tau|t}^*) + c_j^s \sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)} + c_j^s s_\tau \leq 0. \quad (60)$$

我们知道，通过在 t 处求解 (41)，可以满足 (57)。因此，要证明 (60) 成立，我们需要证明以下不等式在 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 处成立：

$$c_j^s \sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)} + c_j^s s_\tau \leq c_j^s s_{T^s+\tau}, \quad (61)$$

将左侧和右侧除以 $c_j^s > 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ ，得到

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)} + s_\tau \leq s_{T^s+\tau}. \quad (62)$$

我们知道，根据 (49)， $V^\delta(x, z)$ 上界由管道尺寸 s 限定，并且 s 随时间的演变由 (51) 给出。因此，在 T^s 之后，管道的尺寸如下：

$$s_{T^s} = \left(1 - e^{\rho T^s}\right) \frac{\bar{w}}{\rho}, \quad (63)$$

，我们可以在时间 $t + T^s$ 写出 $\sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{0|t+T^s}, z_{T^s|t}^*)}$ 的如下上界：

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{0|t+T^s}, z_{T^s|t}^*)} \leq s_{T^s}. \quad (64)$$

。通过将控制律 $\kappa(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*, v_{T^s+\tau|t}^*)$ 应用于系统，我们可以证明候选响应 $\tilde{z}_{\tau|t+T^s}$ 将以因子 ρ 随着时间收缩到先前最优的标称预测 $z_{T^s+\tau|t}^*$ ，根据 (46)。这样，通过迭代地应用收缩性，我们可以为 $\sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)}$ 写出如下的上界：

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)} \leq e^{-\rho\tau} s_{T^s}. \quad (65)$$

。在 (62) 中填入 (65) 得出以下充分条件：

$$e^{-\rho\tau} s_{T^s} + s_\tau \leq s_{T^s+\tau}, \quad (66)$$

，或者，替代为，

$$s_\tau \leq s_{T^s+\tau} - e^{-\rho\tau} s_{T^s}. \quad (67)$$

。

附录 ?? 显示 (67) 在 $\tau \geq 0$ 中成立，其中包括 $\tau \in [0, T]$ 。因此，系统约束对 $\tau \in [0, T - T^s]$ 满足，从而对 $\tau \in [0, T - T^s]$ 也满足。注意，我们无法证明 $\tau \in [0, T]$ 的满足性，因为这种推理依赖于 (57) 成立的事实，而 (57) 仅在 t 对 $\tau \in [0, T]$ 施加，因此在 $t + T^s$ 对 $\tau \in [0, T - T^s]$ 施加。

障碍物规避约束满足条件对于 $\tau \in [0, T - T^s]$

。在区间 $\tau \in [0, T - T^s]$ ，我们知道如果对于 $\tau \in [0, T - T^s], j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 满足以下条件，则候选者 (55) 满足 (41g)：

$$g_j^o(M\tilde{z}_{\tau|t+T^s}) + c^o s_\tau \leq 0. \quad (68)$$

我们知道，对于 $\tau \in [0, T - T^s], j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ ，之前的最优解满足

$$g_j^o(Mz_{T^s+\tau|t}^*) + c^o s_{T^s+\tau} \leq 0. \quad (69)$$

。因此，类似于 $\tau \in [0, T - T^s]$ 的系统约束证明，我们想要在 $g_j^o(Mz_{T^s+\tau|t}^*)$ 的条件下为 $g_j^o(M\tilde{z}_{\tau|t+T^s})$ 创建一个上界。Lipschitz 假设 (43c) 给出了以下对于 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}$ 的上界：

$$g_j^o(M\tilde{z}_{\tau|t+T^s}) \leq g_j^o(Mz_{T^s+\tau|t}^*) + c^o \sqrt{V^\delta(\tilde{z}_{\tau|t+T^s}, z_{T^s+\tau|t}^*)}. \quad (70)$$

通过遵循与系统约束相同的步骤，我们可以证明推导最终归结为证明 (67) 成立，这通过附录 ?? 中的证明和第 ?? 节中的假设 2 的结合而成立。因此，对于 $\tau \in [0, T - T^s]$ ，障碍物避免约束也得以满足。

终端集约束满足条件对于 $\tau \in [T - T^s, T]$

接下来，我们证明如果在时间 t 处满足 (41h)，则候选 (55) 在预测区间 $\tau \in [T - T^s, T]$ 的时间 $t + T^s$ 内满足 (41h)。在证明之前，我们需要知道一个适合的终端集表达式。在 TMPC 情况下， $\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r)$ 被选择为 $\mathcal{J}^f(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r)$ 的一个子集。如果在强健情况下使用这个集合，这意味着候选 (55) 应该在 $t + T^s$ 处满足 $\tau \in [T - T^s, T]$ 的约束。如前所述，TMPC 情况下的最小终端集比例 α 可以选择为 0。然而，即便之前的最优解 $\mathbf{z}_{[0, T]|t}^*$ 正好与参考 $\mathbf{x}_{t+[0, T]}^r$ 重叠，由于区间 $[t, t + T^s]$ 内的扰动影响导致候选 (55) 的终端集约束 (41h) 不可行，因为我们只有一个有限的预测范围和由 (65) 给出的扰动影响的指数收缩。换句话说，候选 $\tilde{\mathbf{z}}_{[T - T^s, T]|t + T^s}$ 偏离了之前的最优解 $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^*$ 。因此，我们需要另一个考虑到 $[t, t + T^s]$ 内扰动影响的最小终端集表达式。

除了上述的干扰影响，我们还需考虑这样一个事实：在一个受到干扰的系统中，即使这样的系统通过闭环终端控制律 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 具有指数级的干扰拒绝特性，之前的最优解也可能不会与参考 $\tau \in [T, T + T^s]$ 重叠，即 $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^* \neq \mathbf{x}_{t+[T, T + T^s]}^r$ 。

总之，为了证明候选 (55) 满足时间 $t + T^s$ 下 $\tau \in [T - T^s, T]$ 的终端集约束 (41h)，我们需要一个终端集来同时考虑以前的最优解 $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^*$ 和参考 $\mathbf{x}_{t+[T, T + T^s]}^r$ 之间的误差，以及候选 $\tilde{\mathbf{z}}_{[T - T^s, T]|t + T^s}$ 和以前的最优解 $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^*$ 之间的误差。

根据 (46)， $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^*$ 和 $\mathbf{x}_{t+[T, T + T^s]}^r$ 之间的误差以 ρ 的速率收缩。对于 $\tau \in [0, T^s]$ ，它由

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq e^{-\rho\tau} \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{T|t}^r)}. \quad (71)$$

给出。

$\tilde{\mathbf{z}}_{[T - T^s, T]|t + T^s}$ 与 $\mathbf{z}_{[T, T + T^s]|t}^*$ 之间的误差是由于在 $[t, t + T^s]$ 期间描述的扰动影响所致，并且根据以下对于 $\tau \in [0, T^s]$ 的表达式以速度 ρ 收缩：

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{z}_{T+\tau|t}^*)} \stackrel{(65)}{\leq} e^{-\rho(T - T^s + \tau)} s_{T^s}. \quad (72)$$

我们可以使用假设 ?? 中的 (44) 来构造候选者总跟踪误差的上界。对于 $\tau \in [0, T^s]$ ，这导致

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} + \sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{z}_{T+\tau|t}^*)}. \quad (73)$$

。因此，我们可以将 $\tau \in [0, T^s]$ 的总终端跟踪误差的上界写为

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq e^{-\rho\tau} \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r)} + e^{-\rho(T - T^s + \tau)} s_{T^s}. \quad (74)$$

。为了证明该候选者在给定此不等式的情况下满足终端集约束，我们利用 [41] 中提出的终端集表达式：

$$\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathcal{X}, s_T \in \mathbb{R} \mid \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r)} + s_T \leq \alpha \right\}, \quad (75)$$

，其中 s_T 根据 (51) 在 T 处评估的管道大小， α 表示终端集缩放，类似于 (13) 中 α 的定义。注意终端集以非平方形式表示，因此我们使用符号 α 而不是 α^2 。

将此终端集扩展到预测区间 $\tau \in [0, T^s]$ 得到

$$\mathcal{X}^f(\mathbf{x}_{t+T+\tau}^r) := \left\{ \mathbf{z}_{T+\tau|t} \in \mathcal{X}, s_{T+\tau} \in \mathbb{R} \mid \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} + s_{T+\tau} \leq \alpha \right\}. \quad (76)$$

我们知道对 $(\mathbf{z}_{T|t}^*, s_T)$ 满足终端集约束 (75)。因此，得出

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r)} \leq \alpha - s_T, \quad (77)$$

，从而导致 (74) 关于 $\tau \in [0, T^s]$ 的以下表达式：

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T) + e^{-\rho(T - T^s + \tau)} s_{T^s}. \quad (78)$$

我们可以使用这个表达式来推导终端集缩放 α 的最小值，使得 $\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}$ 满足对于 $\tau \in [0, T^s]$ 的终端集约束，即，

$$\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{T - T^s + \tau|t + T^s}, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq \alpha - s_{T - T^s + \tau}. \quad (79)$$

当上面描述的两个误差的合，即 (78) 的右边，被终端集中允许的最大误差上界，即 (79) 的右边所约束时，这个不等式被满足：

$$e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T) + e^{-\rho(T - T^s + \tau)} s_{T^s} \leq \alpha - s_{T - T^s + \tau}, \quad (80)$$

根据附录 ?? , 对于 $\tau = 0$ 这是显然成立的。对 $\tau \in (0, T^s]$ 进行此不等式的运算, 得到对 α 的以下下界:

$$e^{-\rho\tau}(\alpha - s_T) + e^{-\rho(T-T^s+\tau)}s_{T^s} \stackrel{(a)}{\leq} \alpha - s_{T-T^s+\tau} \quad (81a)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha + e^{-\rho\tau}s_T - s_{T-T^s+\tau} \stackrel{(b)}{\geq} e^{-\rho(T-T^s+\tau)}s_{T^s} \quad (81b)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha + e^{-\rho\tau}(1 - e^{-\rho T})\frac{\bar{w}}{\rho} - \left(1 - e^{-\rho(T-T^s+\tau)}\right)\frac{\bar{w}}{\rho} \stackrel{(c)}{\geq} e^{-\rho(T-T^s+\tau)}(1 - e^{-\rho T^s})\frac{\bar{w}}{\rho} \quad (81c)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha + \left(e^{-\rho\tau} - e^{-\rho(T+\tau)} - 1 + e^{-\rho(T-T^s+\tau)}\right)\frac{\bar{w}}{\rho} \stackrel{(d)}{\geq} \left(e^{-\rho(T-T^s+\tau)} - e^{-\rho(T+\tau)}\right)\frac{\bar{w}}{\rho} \quad (81d)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha + (e^{-\rho\tau} - 1)\frac{\bar{w}}{\rho} \stackrel{(e)}{\geq} 0 \quad (81e)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha - (1 - e^{-\rho\tau})\frac{\bar{w}}{\rho} \stackrel{(f)}{\geq} 0 \quad (81f)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau})\alpha \stackrel{(g)}{\geq} (1 - e^{-\rho\tau})\frac{\bar{w}}{\rho} \quad (81g)$$

$$\alpha \stackrel{(h)}{\geq} \frac{\bar{w}}{\rho}, \quad (81h)$$

在这其中, (a) 通过设定 (78) 的上界小于等于 (79) 得到, (b) 通过重新排列项并结合 α 乘法因子得到, (c) 通过根据 (51) 写出管道动力得到, (d) 通过结合 $\frac{\bar{w}}{\rho}$ 乘法因子得到, (e) 通过在两边抵消共同项得到, 而 (f) -(h) 通过显然运算此不等式得到。

换句话说, α 应该至少与在 (52) 中给出的最大管道大小一样大。这是有道理的, 因为这意味着终端控制律 $\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 可以使系统保持在参考轨迹周围的那个管道内, 保证应用这个解决方案在任何时候都能使系统安全。注意, α 也可以被选择得比 $\frac{\bar{w}}{\rho}$ 大, 类似于 ?? 中的讨论。这将导致一个更大的终端集, 这将使 (41) 更容易解决, 但也会增加规划参考轨迹时的保守性。

Remark 10. 另一种证明方法是通过首先证明候选 $\tilde{\mathbf{z}}_{T-T^s|t+T^s}$ 和相应的管 s_{T-T^s} 满足终端集约束 (75), 然后利用终端集对 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 是不变的这一事实, 在 $t+T^s$ 处显示 $\tau \in [T-T^s, T]$ 满足终端集约束, 如在附录 ?? 中所示。

系统约束满足对于 $\tau \in [T-T^s, T]$

。如前所述, 鉴于管道不等式 (67) 被证明对 $\tau \in [0, T]$ 成立, 我们需要确保候选系统约束 (56) 对于 $\tau \in [T-T^s, T]$ 的满足, 仅需表明之前最优解 (57) 的系统约束在 $t+T^s$ 处对 $\tau \in [T-T^s, T]$ 已满足, 或者等价地, 考虑终端集 (75) 是保持不变的, 对 t 处的 $\tau \in [T, T+T^s]$ 已满足。

附录 ?? 证明了在 (81) 中给出的相同条件 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 下, 终端集合 (75) 对于 $(\mathbf{z}_{[T, T+T^s]|t}^*, s_{T+\tau}), \tau \geq 0$ 是不变的。鉴于之前 (67) 的证明, 候选系统约束 (56) 在以下假设下对于 $\tau \in [T-T^s, T]$ 是满足的:

Assumption 5 (System constraints tightening for reference trajectory). 参考轨迹满足收紧的系统约束, 即 (6) 成立, 其中给定了 $g_j^{r,s}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$,

$$g_j^{r,s}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g_j^s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + c_j^s\alpha, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \quad (82)$$

其中 c_j^s 在 (43b) 中为 $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 定义。

这个假设与第 ?? 节中 (32) 的设计相似, 但需要一个下限 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 来考虑扰动的影响。

障碍物规避约束满足性对于 $\tau \in [T-T^s, T]$

对于 $\tau \in [T-T^s, T]$, 证明候选障碍物规避约束 (68) 被满足, 遵循与在 Assumption 2 与上述类似假设的组合下对 $\tau \in [T-T^s, T]$ 系统约束进行证明时相同的论点:

Assumption 6 (Obstacle avoidance constraints tightening for reference trajectory). 参考轨迹满足趋紧的障碍规避约束, 即满足 (8), 给定 $g_j^{r,o}(\mathbf{p})$ 由

$$g_j^{r,o}(\mathbf{p}) = g_j^o(\mathbf{p}) + c^o\alpha, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}, \quad (83)$$

, 其中 c^o 定义于 (43c) 和 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 。

这个假设类似于第 ?? 节中 (34) 的设计, 但要求的下限 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 用于解释干扰的影响。 $\square$

这部分的轨迹跟踪证明遵循与第 3.2.2 节中所呈现的类似论证。为了方便起见，我们定义

$$\mathcal{J}_{\tau|t}^s := \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{\tau|t}^*, \mathbf{v}_{\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+\tau}), \quad (84)$$

$$\mathcal{J}_{T|t}^f := \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r), \quad (85)$$

$$\mathcal{J}_t^* := \mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t), \quad (86)$$

$$\mathcal{J}_{\tau|t+T^s}^s := \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}), \quad (87)$$

$$\mathcal{J}_{T|t+T^s}^f := \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r), \quad (88)$$

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^* := \mathcal{J}_{t+T^s}^*(\mathbf{x}_{t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s}), \quad (89)$$

，并从 (21) 在第 3.2.2 节中的相同证明开始：

到目前为止，TMPC 和 RMPC 的证明是相同的。然而，要注意的是，在相同的时间点，阶段成本是不相等的，即 $\mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \neq \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau})$, $\tau \in [0, T]$ ，因为候选项 $\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}$ 偏离了先前的最优解 $\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*$ 。因此，(21) 中的 (c) 不成立。具体来说，对于 $\tau \in [0, T]$ ，候选阶段成本 $\mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau})$ 定义为

$$\mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) = \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2, \quad (90)$$

，而先前的最优阶段成本 $\mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau})$ 定义为

$$\mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) = \|\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2. \quad (91)$$

写出二者之差为

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) - \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \\ &= \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2 - \|\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2 \\ &= \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 - \|\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2 - \|\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2. \end{aligned} \quad (92)$$

。注意，这个表达式在紧集 $\mathcal{Z} \times \bar{\mathcal{Z}}$ 上是连续可微的。因此，它在该集合上是利普希茨连续的，并且对 $\tau \in [0, T]$ ，有以下不等式成立：

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 - \|\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{x}_{t+T^s+\tau}^r\|_Q^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2 - \|\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^* - \mathbf{u}_{t+T^s+\tau}^r\|_R^2 \\ & \leq L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*\| + L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{u}} \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*\|. \end{aligned} \quad (93)$$

该结果表明我们可以找到阶段成本差异的上界。

理想情况下，我们希望找到这个上界的最小可能值。我们可以在假设 ?? 中将 (43a) 重写为

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \frac{1}{\sqrt{c^{\delta, 1}}} \sqrt{V^{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}. \quad (94)$$

。将此上界插入到 (93) 中就给出了 $\tau \in [0, T]$ ：

$$L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*\| \leq \frac{L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{x}}}{\sqrt{c^{\delta, 1}}} \sqrt{V^{\delta}(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)}. \quad (95)$$

。换句话说，候选状态和以前的最优状态之间的差异由另外的利普希茨常数 $\frac{L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{x}}}{\sqrt{c^{\delta, 1}}}$ 乘以在对应点处评估的增量李雅普诺夫函数的值所上界。

为了完善 $L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{u}} \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*\|$ 的表达式，我们注意到 (43b) 表明当输入被限制在由 (2) 定义的一个盒子内时，控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ 是 Lipschitz 连续的。因此，对于 $\tau \in [0, T]$ ，可以得到以下结果：

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} - \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*\| & \stackrel{(a)}{=} \|\kappa(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*) - \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*\| \\ & \stackrel{(b)}{=} \|\mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^* + \kappa^{\delta}(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*) - \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*\| \\ & \stackrel{(c)}{\leq} \bar{\kappa}^{\delta} \sqrt{V^{\delta}(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)}, \end{aligned} \quad (96)$$

，其中 (a) 是通过填入 (55c) 获得的，(b) 是通过填入控制律定义 (42) 获得的，(c) 是基于反馈律在 $\kappa^{\delta}(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)$ 中的 Lipschitz 界限，并具有常数 $\bar{\kappa}^{\delta}$ 。

结合 (92) 和 (93)，并填入上界 (95) 和 (96)，给出了 $\tau \in [0, T]$ 的以下阶段成本上界：

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) - \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \\
& \leq \left(\frac{L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{x}}}{\sqrt{c^{\delta, 1}}} + L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{u}} \bar{\kappa}^\delta \right) \sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)} \\
& =: L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{xu}} \sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)}.
\end{aligned} \tag{97}$$

利用 (65) 中 $\sqrt{V^\delta(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*)}$ 的上界，我们可以定义对 $\tau \in [0, T]$ 阶段成本的以下上界：

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) - \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \\
& \leq L^{\mathcal{J}^s, \mathbf{xu}} e^{-\rho\tau} \left(1 - e^{\rho T^s} \right) \frac{\bar{w}}{\rho} =: \alpha_\tau^s(\rho, \bar{w}, T^s),
\end{aligned} \tag{98}$$

或者，替代地，

$$\mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \leq \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) + \alpha_\tau^s(\rho, \bar{w}, T^s). \tag{99}$$

。换句话说，这意味着候选阶段成本与预测时刻 $\tau \in [0, T]$ 之前的最优阶段成本相差最多为 $\alpha_\tau^s(\rho, \bar{w}, T^s)$ 。

与阶段成本相比，候选方案和扩展的先前最优方案 (55) 的终端成本不相等，即 $\mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \neq \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r)$ 。由于终端成本在紧致集 $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 上也是连续可微的，因此它是利普希茨连续的。因此，我们可以写出与阶段成本差异类似的不等式 (93)：

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \\
& = \|\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s} - \mathbf{z}_{t+T^s+T}^r\|_P^2 - \|\mathbf{z}_{T^s+T|t}^* - \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r\|_P^2 \\
& \leq L^{\mathcal{J}^f, \mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s} - \mathbf{z}_{T^s+T|t}^*\|.
\end{aligned} \tag{100}$$

遵循上述相同步骤，我们可以写出终端成本差异的上界为

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \\
& \leq L^{\mathcal{J}^f} e^{-\rho T} \left(1 - e^{\rho T^s} \right) \frac{\bar{w}}{\rho} =: \alpha^f(\rho, \bar{w}, T^s).
\end{aligned} \tag{101}$$

我们现在可以在 (??) 中进一步推导出轨迹跟踪证明，将 (21) 中的 (c) 的等式替换为 (99) 中的不等

式：

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^* \stackrel{(a)}{\leq} \int_0^{T-T^s} \mathcal{J}_{\tau|t+T^s}^s d\tau + \int_{T-T^s}^T \mathcal{J}_{\tau|t+T^s}^s d\tau + \mathcal{J}_{T|t+T^s}^f \quad (102a)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} \int_{T^s}^T \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \mathcal{J}_{T|t+T^s}^f \quad (102b)$$

$$\stackrel{(c)}{=} \int_0^T \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \mathcal{J}_{T|t+T^s}^f \quad (102c)$$

$$\stackrel{(d)}{=} \mathcal{J}_t^* - \mathcal{J}_{T|t}^f - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \mathcal{J}_{T|t+T^s}^f \quad (102d)$$

$$\stackrel{(e)}{=} \mathcal{J}_t^* - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \mathcal{J}_{T|t+T^s}^f - \mathcal{J}_{T|t}^f + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau \quad (102e)$$

$$\stackrel{(f)}{\leq} \mathcal{J}_t^* - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \mathcal{J}_{T^s+T|t}^f + \alpha^f(\rho, \bar{w}, T^s) - \mathcal{J}_{T|t}^f + \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau \quad (102f)$$

$$\stackrel{(g)}{\leq} \mathcal{J}_t^* - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \alpha^f(\rho, \bar{w}, T^s), \quad (102g)$$

，其中 (a) 通过 (??) 获得，(b) 通过在 $\int_0^{T-T^s} \mathcal{J}_{\tau|t+T^s}^s d\tau$ 和 $\int_{T-T^s}^T \mathcal{J}_{\tau|t+T^s}^s d\tau$ 中填充 (99) 得到，(c)、(d) 和 (e) 通过遵循 (21) 中的 (d)、(e) 和 (f) 的相同步骤得到，(f) 通过 (101) 获得，(g) 通过 Assumption ?? 中的 (53) 得到。利用 Assumption ?? 中的 (53) 可以得到

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^* - \mathcal{J}_t^* \leq - \int_0^{T^s} \mathcal{J}_{\tau|t}^s d\tau + \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \alpha^f(\rho, \bar{w}, T^s). \quad (103)$$

因此，我们可以为 $\mathcal{J}_t^*$ 获得与第 3.2.2 节中相同的下降界，直至

$$\bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}, T^s) := \int_{T^s}^T \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \int_T^{T+T^s} \alpha_{\tau}^s(\rho, \bar{w}, T^s) d\tau + \alpha^f(\rho, \bar{w}, T^s). \quad (104)$$

类似于第 3.2.2 节，我们首先通过注意到最优代价 (103) 的下降特性推导出收敛性，此下降特性意味着 $c^{\mathcal{J},d} > 0$ 为常数的

$$\mathcal{J}_{t+T^s}^* - \mathcal{J}_t^* \leq -c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2 d\tau + \bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}, T^s), \quad (105)$$

。重新排列这些项得到

$$c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2 d\tau \leq \mathcal{J}_t^* - \mathcal{J}_{t+T^s}^* + \bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}, T^s). \quad (106)$$

表达式。我们感兴趣的是实际跟踪误差 $\|\mathbf{x}_{\tau} - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2$ ，它的上界为

$$\|\mathbf{x}_{\tau} - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2 \stackrel{(a)}{\leq} c^t \|\mathbf{x}_{\tau} - \mathbf{z}_{\tau-t|t}^*\| + \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2 \quad (107a)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} c^{t,1} s_{\tau} + \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_{\tau}^r\|_Q^2 \quad (107b)$$

，其中 (a) 通过常数为 c^t 的 Lipschitz 界得到，(b) 则通过结合 (43a)、(49) 和 (51) 在范数上的另一个常数为 $c^{t,1}$ 的 Lipschitz 界得到。因此，我们可以为 $\|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2$ 写出类似于 (106) 的上界：

$$c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau \leq c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau + c^{t,1} s_\tau d\tau \quad (108a)$$

$$\stackrel{(a)}{=} c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau + c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} c^{t,1} s_\tau d\tau \quad (108b)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} \mathcal{J}_t^* - \mathcal{J}_{t+T^s}^* + \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s), \quad (108c)$$

其中 $\bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s) := \bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}, T^s) + c^{\mathcal{J},d} c^{t,1} \left(T^s - \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho T^s}) \right) \frac{\bar{w}}{\rho}$ ，并且 (a) 是通过写出积分表达式得到的，(b) 是通过 (106) 得到的。从 0 到 $t = 2T^s$ 迭代此不等式得到

$$c^{\mathcal{J},d} \int_0^{2T^s} \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau \leq \mathcal{J}_0^* - \mathcal{J}_{T^s}^* + \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s) + \mathcal{J}_{T^s}^* - \mathcal{J}_{2T^s}^* + \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s) \quad (109a)$$

$$\leq \mathcal{J}_0^* - \mathcal{J}_{2T^s}^* + 2\bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s) \quad (109b)$$

$$= \mathcal{J}_0^* - \mathcal{J}_{2T^s}^* + \frac{t}{T^s} \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s), \quad (109c)$$

。与第 3.2.2 节中的 (24) 相对比，为 $t \rightarrow \infty$ 迭代此不等式在最坏情况干扰影响下不一定有界。因此，我们可以得出结论，通过用 t 将其除以并利用 $\mathcal{J}_t^*$ 统一有界的事实，此不等式的平均值会变小：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau}{t} \leq \frac{\mathcal{J}_0^* - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_t^*}{c^{\mathcal{J},d} t} + \frac{1}{c^{\mathcal{J},d} T^s} \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s). \quad (110)$$

因此，通过在 $\frac{\int_0^t \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau}{t}$ 上应用 Barbalat 引理 [29]，我们得出结论，平均而言，跟踪误差 $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^r\|$ 随时间逐渐变小，与 $\bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}, T^s)$ 成比例。注意，在存在不可预测和有界干扰的情况下，此结论是合理的。□

4.3.2 设计以满足假设

本节将详细介绍

- 需要满足假设 2 的避障约束；
- 增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 以及对应的 Lipschitz 常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 c^o ，需要满足假设 ??；
- 终端成分，需要满足假设 ??；
- 需要满足假设 5 和 6 的参考轨迹。

的设计：

障碍物规避约束设计

为了证明递归可行性，我们需要障碍规避约束满足假设 2。我们可以通过遵循与第 ?? 节中相同的设计来实现这一点。

增量稳定性设计

增量稳定性设计遵循与第 ?? 节中终端成分设计相似的程序。其目标是计算合适的增量李雅普诺夫 (Lyapunov) 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ，该函数由 (41e) 中给定的管道大小 s 限定，并找到相应的控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ ，使其满足 (43a) - (44) 的属性。

Remark 11. 与第 ?? 节中的设计最重要的区别在于， $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 应满足收缩性质 (43d)，该性质用于证明在存在扰动情况下的轨迹跟踪和递归可行性。此外，控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ 在证明中使用，并根据 (42) 实施闭环执行。

我们可以如下写出 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 的动态：

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} = \frac{d}{dt} (V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \quad (111)$$

由于找到 $\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的表达式比找到 $\frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 的表达式更容易，我们将 (111) 改写为

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 2\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}. \quad (112)$$

填入所需的管动态 (41e) 给出了 $\frac{d}{dt}V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的以下上限:

$$\frac{d}{dt}V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 2\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \left(-\rho\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} + \bar{w} \right) = -2\rho V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + 2\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}\bar{w}. \quad (113)$$

因此, 目标是找到一个合适的增量 Lyapunov 函数, 其上限可以表示为 (113) 的形式。

使用控制收缩度量 (CCMs) [45], 我们可以定义增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 为

$$V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) := \min_{\mathbf{c}^x(s) \in C(\mathbf{x}, \mathbf{z})} \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{c}^x(s)}{\partial s}^\top P^\delta(\mathbf{c}^x(s)) \frac{\partial \mathbf{c}^x(s)}{\partial s} ds, \quad (114)$$

, 其中度量是 $P^\delta(\mathbf{c}^x(s))$, 并且 $\mathbf{c}^x(s)$ 是曲线集中的一条曲线

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) := \left\{ \mathbf{c}^x(s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n^x} \mid \mathbf{c}^x(0) = \mathbf{z}, \mathbf{c}^x(1) = \mathbf{x} \right\}. \quad (115)$$

, $\gamma^x(s) \in C(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 表示测地线: 最小化 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的曲线。

我们知道, 标称状态和扰动状态的演化分别由 (1) 和 (38) 描述。因此, 我们知道测地线 $\gamma^x(s)$ 的端点 $\gamma^x(0)$ 和 $\gamma^x(1)$ 随时间的演化。一个随时间演化的 $\gamma^x(s), s \in [0, 1]$ 的合逻辑候选是匹配 $\dot{\mathbf{z}}$ 和 $\dot{\mathbf{x}}$ 分别对于 $s = 0$ 和 $s = 1$, 因而由

$$\dot{\gamma}^x(s) := f(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) + E(\mathbf{w}^b + s\mathbf{w}^0), \quad (116)$$

给出, 并采用通过在测地线上积分反馈律所获得的控制律 $\gamma^u(s)$:

$$\gamma^u(s) := \mathbf{v} + \int_0^s K^\delta(\gamma^x(\tilde{s})) \frac{\partial \gamma^x(\tilde{s})}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s}. \quad (117)$$

。同样, 对于随时间演化的测地路径导数的候选由

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s} := A^{\text{cl}}(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) \frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s} + E\mathbf{w}^0, \quad (118)$$

给出, 其闭环动态为

$$A^{\text{cl}}(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) := A(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) + B(\gamma^x(s), \gamma^u(s))K^\delta(\gamma^x(s)), \quad (119)$$

, 并具有雅可比矩阵

$$A(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) := \frac{\partial f^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\gamma^x(s), \gamma^u(s))}, \quad B(\gamma^x(s), \gamma^u(s)) := \frac{\partial f^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\gamma^x(s), \gamma^u(s))}, \quad (120)$$

, 因为在局部, 非线性动态由其雅可比矩阵给出。

分别使用定义 (116) 和 (118) 来表示 $\dot{\gamma}^x(s)$ 和 $\frac{d}{dt} \frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s}$, 并暂时使用以下简记法:

$$\gamma^x := \gamma^x(s), \quad (121a)$$

$$\gamma^u := \gamma^u(s), \quad (121b)$$

$$A^{\text{cl}} := A^{\text{cl}}(\gamma^x, \gamma^u), \quad (121c)$$

$$A := A(\gamma^x, \gamma^u), \quad (121d)$$

$$B := B(\gamma^x, \gamma^u), \quad (121e)$$

$$\gamma_s^x := \frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s}, \quad (121f)$$

$$\dot{\gamma}_s^x := \frac{d}{dt} \frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s}, \quad (121g)$$

$$P^\delta := P^\delta(\gamma^x), \quad (121h)$$

。我们可以写出 $\frac{d}{dt}V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 上限的时间演化形式 (113)，使用候选者 γ_s^x 和 $\dot{\gamma}_s^x$ ：

$$\frac{d}{dt}V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \int_0^1 \dot{\gamma}_s^{x^\top} P^\delta \gamma_s^x + \gamma_s^{x^\top} \dot{P}^\delta \gamma_s^x + \gamma_s^{x^\top} P^\delta \dot{\gamma}_s^x ds \quad (122a)$$

$$= \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} \left(A^{\text{cl}\top} P^\delta + \dot{P}^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} \right) \gamma_s^x + (E\mathbf{w}^0)^\top P^\delta \gamma_s^x + \gamma_s^{x^\top} P^\delta E\mathbf{w}^0 ds \quad (122b)$$

$$= \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} \left(A^{\text{cl}\top} P^\delta + \dot{P}^\delta + P^\delta g A^{\text{cl}} \right) \gamma_s^x + 2\gamma_s^{x^\top} P^\delta E\mathbf{w}^0 ds \quad (122c)$$

$$= \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} \left(A^{\text{cl}\top} P^\delta + \dot{P}^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} \right) \gamma_s^x ds + 2 \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} P^\delta E\mathbf{w}^0 ds \quad (122d)$$

$$= \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} \left(A^{\text{cl}\top} P^\delta + \dot{P}^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} \right) \gamma_s^x ds + 2 \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} P^{\delta \frac{1}{2}} P^{\delta \frac{1}{2}} E\mathbf{w}^0 ds \quad (122e)$$

$$\stackrel{(a)}{\leq} -2\rho \int_0^1 \gamma_s^{x^\top} P^\delta \gamma_s^x ds + 2 \int_0^1 \left\| \gamma_s^{x^\top} P^{\delta \frac{1}{2}} \right\| \left\| P^{\delta \frac{1}{2}} E\mathbf{w}^0 \right\| ds \quad (122f)$$

$$\stackrel{(b)}{=} -2\rho V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + 2 \int_0^1 \left\| \gamma_s^{x^\top} \right\|_{P^\delta} \left\| E\mathbf{w}^0 \right\|_{P^\delta} ds \quad (122g)$$

$$\stackrel{(c)}{\leq} -2\rho V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + 2\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}\bar{w}, \quad (122h)$$

用于 $\mathbf{w}^0 \in \mathcal{W}$ ，其中 (a) 是通过以下约缩 LMI [45] 的组合获得的：

$$\begin{aligned} & \dot{P}^\delta(\gamma^x) + P^\delta(\gamma^x) (A(\gamma^x, \gamma^u) + B(\gamma^x, \gamma^u)K^\delta(\gamma^x)) + \\ & (A(\gamma^x, \gamma^u) + B(\gamma^x, \gamma^u)K^\delta(\gamma^x))^\top P^\delta(\gamma^x) + 2\rho P^\delta(\gamma^x) \preceq 0, \end{aligned} \quad (123)$$

，其中包含 $\dot{P}^\delta(\gamma^x) := \frac{\partial P^\delta(\gamma^x)}{\partial \gamma^x} \dot{\gamma}^x$ 和约缩率 $\rho > 0$ ，这基于 [46] 中所述的非线性系统约缩分析和柯西-施瓦茨不等式，(b) 通过 (114) 中 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的定义，(c) 通过以下 $\bar{w}$ 的定义：

$$\bar{w} := \max_{\substack{\mathbf{w}^0 \in \mathcal{W} \\ \gamma^x \in C(\mathbf{x}, \mathbf{z})}} \|E\mathbf{w}^0\|_{\bar{P}^\delta(\gamma^x)}, \quad (124)$$

，其中包含

$$\bar{P}^\delta(\gamma^x) := \lambda_{\max}(P^\delta(\gamma^x)) I^{n_x}, \quad (125)$$

，其中 $\lambda_{\max}(P^\delta(\gamma^x))$ 表示矩阵 $P^\delta(\gamma^x)$ 的最大特征值。

Remark 12. 由于我们使用简写符号 (121a) 和 (121b)，我们可以对测地线上无穷多个点 $s \in [0, 1]$ 评估 LMI (123)。因此，(123) 也可以看作是一组 LMI。由于约束的收缩方式是 $(\gamma^x, \gamma^u) \in \mathcal{Z}, s \in [0, 1]$ [19, Prop. 5]，因此只需像第 ?? 节中描述的那样划分 $\mathcal{Z}$ 即可。

Remark 13. 与 [45] 相比，(123) 使用了简写符号 (121)，因为我们不考虑时间变动的系统，所以它不包含时间依赖性。

注意，(124) 确认了对于紧扰动集 (39)，性质 ?? 成立。

还要注意，(123) 包含了 $P^\delta(\gamma^x)$ 和 $K^\delta(\gamma^x)$ 的乘积。因此，在一个 SDP 的背景下，这是一个关于 $P^\delta(\gamma^x)$ 和 $K^\delta(\gamma^x)$ 都是决策变量的双线性 LMI。在通过坐标变换 $X^\delta(\gamma^x) = P^\delta(\gamma^x)^{-1}$ 和 $Y^\delta(\gamma^x) = K^\delta(\gamma^x)P^\delta(\gamma^x)^{-1}$ 后，(123) 转化为以下的凸收缩 LMI [45]：

$$\begin{aligned} & -\dot{X}^\delta(\gamma^x) + A(\gamma^x, \gamma^u)X^\delta(\gamma^x) + B(\gamma^x, \gamma^u)Y^\delta(\gamma^x) + \\ & (A(\gamma^x, \gamma^u)X^\delta(\gamma^x) + B(\gamma^x, \gamma^u)Y^\delta(\gamma^x))^\top + 2\rho X^\delta(\gamma^x) \preceq 0. \end{aligned} \quad (126)$$

因此，任何 $P^\delta(\gamma^x)$ 的组合以及通过在测地线上积分得到的对应控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ ，即

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \gamma^u(1), \quad (127)$$

其中 $\gamma^u(s)$ 在 (117) 中给出，满足 LMI (126) 确保闭环轨迹 $\mathbf{x}$ 将以速率 ρ 指数性收缩至 $\mathbf{z}$ 。有关此结果的更详细说明，请参见 [19] 以及其中的参考文献 [18, 39, 45–47]。

通常， $\gamma^x(s)$ 是一条非线性曲线，因此在求解器中将 (114) 作为终端集 (75) 的一部分来评估是计算密集型的。为了减少求解时间，我们选择一个状态无关的增量李雅普诺夫函数，即 P^δ 而不是 $P^\delta(\gamma^x)$ ，使得测地线成为连接 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x}$ 的一条直线。在这种情况下，测地线在数学上由

$$\gamma^x(s) = \mathbf{z} + s(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (128)$$

和

$$\frac{\partial \gamma^x(s)}{\partial s} = \mathbf{x} - \mathbf{z}. \quad (129)$$

描述。因此，收缩 LMI (126) 变为

$$A(\gamma^x, \gamma^u)X^\delta(\gamma^x) + B(\gamma^x, \gamma^u)Y^\delta(\gamma^x) + (A(\gamma^x, \gamma^u)X^\delta(\gamma^x) + B(\gamma^x, \gamma^u)Y^\delta(\gamma^x))^\top + 2\rho X^\delta \preceq 0, \quad (130)$$

，其中相较于 (126)，由于时间导数由 $\dot{X}^\delta(\gamma^x) = \frac{\partial \dot{X}^\delta(\gamma^x)}{\partial \gamma^x} \dot{\gamma}^x$ 给出，项 $-\dot{X}^\delta(\gamma^x)$ 消失。此外，增量李雅普诺夫函数 (114) 简化为以下二次表达式：

$$V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} - \mathbf{z})^\top P^\delta (\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (131)$$

或等价地，

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})} = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{P^\delta}, \quad (132)$$

，控制律由

$$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \gamma^u(1) = \mathbf{v} + \int_0^1 K^\delta(\gamma^x(s))(\mathbf{x} - \mathbf{z}) ds. \quad (133)$$

给出。请注意，这意味着使用 $c^{\delta,1} = \lambda_{\min}(P^\delta)$ 和 $c^{\delta,u} = \lambda_{\max}(P^\delta)$ 时，(43a) 可以简单地满足，其中 $\lambda_{\min}(P^\delta)$ 和 $\lambda_{\max}(P^\delta)$ 分别表示 P^δ 的最小和最大特征值，并且 (44) 也能满足。相应地，我们可以在 (48) 中将常数 $\bar{w}$ 设为

$$\bar{w} := \max_{\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})} \|E\mathbf{w}^0\|_{P^\delta}, \quad (134)$$

，因为 $\mathcal{W}$ 是一个凸多面体集合。选择一个状态无关的 P^δ 增加了保守性，因为在雅可比矩阵 (120) 高度非线性的状态空间部分，所得曲线长度比非线性测地线 $\gamma^x(s)$ 更长。因此，在这条曲线上积分控制律会导致次优控制策略。这种控制策略的收缩速度至少为 ρ ，但与基于非线性测地线的控制策略相比，其效果略显不足。

为了减少保守性，我们利用了一个状态依赖的反馈增益 $K^\delta(\gamma^x)$ 。 $K^\delta(\gamma^x)$ 使用 (127) 在求解器外部计算，因此计算时间对于实现实时应用而言不那么重要。

Remark 14. 请注意，CCM 方法提供了一种确保一致指数稳定性的方法，即使度量 $P^\delta(\mathbf{x})$ 是状态相关的，指数稳定性保证在整个状态空间中都成立。这与跟踪 LMI (26) 的设计形成对比，该设计包括参考相关的矩阵 $P(\mathbf{r})$ ，但仅在参考轨迹周围的局部区域 ϵ 内有效。在实践中，难以获得结果成立的 ϵ 的值。因此，为了在稳健情况下获得严格的安全保证，实用上建议根据上述设计使用 CCM 或去除 P^δ 中的状态依赖性。使用 CCM，从度量空间计算积分表达来获得一致的指数稳定性。使用状态无关的 P^δ ，由于选择一个常量 CCM P^δ 会导致最小化 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{x}$ 之间测地线的直线，如上所述，因此一致的指数稳定性是均值定理 (MVT) 的直接结果。

收缩 LMI (126) 是主要性质，使得强鲁棒递归可行性和轨迹跟踪证明能够成立。所得度量 P^δ 用于构建增量 Lyapunov 函数 (114)，其满足 (43d)。因此，管道 (49) 增长到一个稳健的正不变 (RPI) 集：

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t)} \leq \bar{s}, \quad t \geq 0 \quad (135)$$

，定义在 (52) 中的 $\bar{s}$ 。为了减少保守性，我们通过满足以下 RPI LMI 来优化 (135) 的形状：

$$\begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda X^\delta & E\mathbf{w}^0 \\ (E\mathbf{w}^0)^\top & -\lambda\delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (136)$$

，具有 $\zeta \in \mathcal{Z}$ 、 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 和乘子 $\lambda \geq 0$ 。这个 LMI 强制子水平集 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta^2$ 对于扰动动态 (38) 在所有 $\mathbf{w}^0 \in \mathcal{W}$ 和 $\delta := \bar{s}$ 时是 RPI。注意 ρ 是一个超参数， $\bar{w}$ 可以在使用 (134) 优化 P^δ 之后计算。因此，不失一般性，我们可以设置 $\delta = 1$ ，这有助于在二次形式 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 和线性形式 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 之间建立桥梁。此外，由于扰动在系统动态 (38) 中线性进入，并且集合 $\mathcal{W}$ 是凸的，只需在 $\mathcal{W}$ 的顶点处评估形式为 (136) 的一组 LMIs。附录 B 提供了 (136) 的证明。

Remark 15. 另一种使用多面体集合 $\mathcal{W}$ 设计 RPI 集合的方法是利用 [18] 中提出的对扰动 $\mathbf{w}^0$ 的通用 $\mathcal{L}_\infty$ 增益界。

与 TMPC 设计相反，在 TMPC 设计中，终端集缩放 α 是根据与障碍物 $d_{\max}$ 的期望距离计算的， $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的终端集及相应的 RPI 集由于扰动 $\mathbf{w}^0 \in \mathcal{W}$ 而具有最小尺寸。为了防止集合变大，从而导致保

守行为，使用以下 SDP 计算出 P^δ 和 $K^\delta(\mathbf{x})$ ，其中缩紧常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 c^o 相对于相应约束区间进行归一化，并被最小化：

$$\min_{\substack{X^\delta, Y^\delta(\mathbf{x}) \\ c_j^{s^2}, c^{o2}}} c^{c,o} c^{o2} + \sum_{j=1}^{n^s} c_j^{c,s} c_j^{s^2}, \quad (137a)$$

$$\text{s. t. } X^\delta \succeq 0, \quad (137b)$$

$$A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + 2\rho X^\delta \preceq 0, \quad (137c)$$

$$\begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda X^\delta & E\mathbf{w}^0 \\ (E\mathbf{w}^0)^\top & -\lambda \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (137d)$$

$$\begin{bmatrix} c_j^{s^2} & L_j^s \begin{bmatrix} Y^\delta(\mathbf{x}) \\ X^\delta \end{bmatrix} \\ \left(L_j^s \begin{bmatrix} Y^\delta(\mathbf{x}) \\ X^\delta \end{bmatrix} \right)^\top & X^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \quad (137e)$$

$$\begin{bmatrix} c^{o2} I^{n^p} & M X^\delta \\ (M X^\delta)^\top & X^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (137f)$$

$$\zeta \in \mathcal{Z}, \quad \mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W}),$$

，具有收缩率 $\rho > 0$ 和乘数 $\lambda \geq 0$ ，可以通过对该 SDP 和 $\delta = 1$ 进行二分计算出来。

注意，LMI (137e)，为了确保系统约束的 Lipschitz 连续性，与 (37) 相同。我们可以推导出类似的 LMI (137f)，以确保避障约束的 Lipschitz 连续性。其证明类似于 (37) 的证明，如 [32] 中所写，并包括在附录 ?? 中以保证完整性。

与 SDP (28) 相似，SDP (137) 是半无限的，因此我们需要在网格点和顶点处评估表达式，既在 $\mathcal{Z}$ 中也在 $\mathcal{W}$ 中，以考虑干扰的影响。

Remark 16. 请注意，LMI (137d) 必须在 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{W}$ 的所有网格点上计算，这意味着 LMI 的数量等于这两个集合中网格点数量的乘积。这可能导致（离线）计算时间的急剧增加。为了缓解这种影响，我们可以引入决策变量 $\bar{\mathcal{W}}$ 并使用以下 LMI 的组合，这足以确保满足 (137d)：

$$\begin{bmatrix} 0^{n^x} & E\mathbf{w}^0 \\ (E\mathbf{w}^0)^\top & 0 \end{bmatrix} \preceq \bar{\mathcal{W}}, \quad \mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W}), \quad (138)$$

$$\bar{\mathcal{W}} + \begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda X^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \zeta \in \mathcal{Z}. \quad (139)$$

总之，通过成功解决 (137)，我们可以找到矩阵 P^δ 和 $K^\delta(\mathbf{x})$ ，使得增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 由 (131) 给出，并满足 (43a) 和 (44)。此外，收缩 LMI (126)、RPI LMI (136) 和 Lipschitz LMI (37) 以及 (137f) 的设计确保了满足 (43b)、(43c) 和 (43d)。因此，我们可以得出结论，这一设计满足假设 ??。

终端成分设计

终端成分设计涉及计算一个合适的终端代价 $\mathcal{J}^f(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r)$ ，以满足假设 ??。根据上一节的设计，我们知道在 (132) 中， $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})}$ 至少以因子 ρ 递减，或者等效地， $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 至少以因子 2ρ 递减，给定控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ 在 (133) 中。因此，如果我们设计终端控制律为

$$\kappa^f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{u}^r + \kappa^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}^r) = \mathbf{u}^r + \int_0^1 K^\delta(\gamma^x(s)) ds (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r), \quad (140)$$

，只需设计一个矩阵 P ，使得基于 (53) 的以下下降约束得到满足：

$$\frac{d}{dt} ((\mathbf{x} - \mathbf{z})^\top P (\mathbf{x} - \mathbf{z})) \leq -\mathcal{J}^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad (141)$$

，其中 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b$ 和 $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ 。以下 LMI 确保该条件成立，详见 [13]：

$$(A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(\mathbf{x}))^\top P + P(A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(\mathbf{x})) \preceq -Q - K^\delta(\mathbf{x})^\top R K^\delta(\mathbf{x}), \quad \zeta \in \mathcal{Z}. \quad (142)$$

因此，为了找到满足 (53) 的最低特征值的 P ，我们求解以下 SDP：

$$\min_P \text{trace } P, \quad (143a)$$

$$\text{s. t. } (A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(\mathbf{x}))^\top P + P(A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(\mathbf{x})) \preceq -Q - K^\delta(\mathbf{x})^\top R K^\delta(\mathbf{x}), \quad \zeta \in \mathcal{Z}. \quad (143b)$$

Remark 17. 一种更简单但更保守的解决方案是定义一个常数缩放因子 μ ，使得 $P = \mu P^\delta$ 。可以证明， μ 的下界可以表示为 $Q, R, K^\delta(\mathbf{x}), \rho$ 和 $c^{\delta, u}$ 的函数，使得 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 通过 2ρ 的收缩意味着在 (53) 中最小终端成本下降得到满足。

因此，我们可以得出结论，假设 ?? 得到了满足。

参考轨迹设计假设 5 和 6 很容易满足，如果用于生成参考轨迹的系统 and 避障约束是根据 (82) 和 (83) 使用来自 SDP (137) 的收缩常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 c^o 构造的，并且 α 满足在 (81) 中计算的下限。相应地，终端集 (75) 被合适地设计在参考轨迹周围，以确保闭环系统和避障约束在所有时间点的满意度。

总之，所提出的 RMPC 方案是一种有效的工具，可以为具有受扰动动力学的移动机器人描述的动态可行参考轨迹的跟踪提供安全保证。该方案基于这样的思想：在给定合适设计的控制律的情况下，扰动的影响可以通过增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的子水平集来界定。这个界限，也被称为管道尺寸，可以用来收紧系统和障碍回避约束，以便闭环系统始终满足实际的系统和障碍回避约束。通过基于 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 构建一个最小的不变终端集来证明递归可行性。此外，通过展示终端成本矩阵 P 可以使用在 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 中使用的权重矩阵 P^δ 来计算，从而证明轨迹跟踪。

注意，通过对参考轨迹的系统 and 避障约束分别收紧 $c_j^s \alpha, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 $c^o \alpha$ ，是保证闭环约束满足的充分条件。然而，在预测视界的开始阶段，不要求可行解至少从距离约束如此远的地方开始，因为约束是通过从零开始增加的管尺寸收紧的。因此，在规划器中实施类似的适当设计的约束收紧方案来生成参考轨迹，将允许更不保守的运动，即更接近障碍物的运动，从而更快地达到目标。

在实践中，物理机器人不仅受到动态扰动的影响，还受到传感器测量噪声的影响。这意味着我们无法直接测量系统的状态。为了在传感器噪声的情况下提供安全保证，需要识别动态扰动和传感器噪声，计算类似于本节中所呈现的合适材料，并实施一个实时 RMPC 方案，可以证明其具有类似于本节中所呈现的性质。

5 具有扰动的轨迹跟踪的鲁棒输出反馈 MPC

本节的目标是介绍一种鲁棒的输出反馈 MPC (ROMPC) 方案，该方案用于跟踪满足性质 1 的参考轨迹，当系统如第 5.1 节中描述时。在该系统中，状态只能通过带噪声的输出测量间接测量。类似于第 3.1 节，第 5.2 节陈述了闭环系统的优化问题和控制律。然后，第 ?? 节建立了对 ROMPC 的直观认识，并解释了公式中所需元素及相关性质。最后，第 ?? 节对 ROMPC 公式进行了总结。

5.1 带有测量噪声描述的受扰动移动机器人

干扰系统的动力学由 (38) 给出。相应的输出方程为

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + F\boldsymbol{\eta}, \quad (144)$$

，其中测量输出为 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n^y}$ ，观测矩阵为 $C \in \mathbb{R}^{n^y \times n^x}$ ，测量或传感器噪声为 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n^\eta}$ ，噪声选择矩阵为 $F \in \mathbb{R}^{n^y \times n^\eta}$ 。

测量噪声被假设包含在已知的边界框 $\boldsymbol{\eta} \in H$ 中。通过记录数据，我们可以计算边界框 H ，其中每个维度 $i \in \mathbb{N}_{[1, n^\eta]}$ 的记录测量噪声值都有下界 η_i^{rec} 和上界 $\bar{\eta}_i^{\text{rec}}$ ：

$$H := \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n^\eta} \mid \eta_i^{\text{rec}} \leq \eta_i \leq \bar{\eta}_i^{\text{rec}}, i \in \mathbb{N}_{[1, n^\eta]} \right\}. \quad (145)$$

这个测量噪声边界框可以用于下一节中描述的 ROMPC 公式。

5.2 ROMPC 公式

考虑以下用于跟踪参考轨迹 (4) 的 ROMPC 公式：

$$\mathcal{J}_t^*(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_t) = \min_{\mathbf{z}_{\cdot|t}, \mathbf{v}_{\cdot|t}} \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T|t}, \mathbf{x}_{t+T}^r) + \int_0^T \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}, \mathbf{r}_{t+\tau}) d\tau, \quad (146a)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{z}_{0|t} = \hat{\mathbf{x}}_t, \quad (146b)$$

$$s_0 = 0, \quad (146c)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{\tau|t} = f(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}) + E\mathbf{w}^b, \quad \tau \in [0, T], \quad (146d)$$

$$\dot{s}_\tau = -\rho s_\tau + \bar{\mathbf{w}}^o, \quad \tau \in [0, T], \quad (146e)$$

$$g_j^s(\mathbf{z}_{\tau|t}, \mathbf{v}_{\tau|t}) + c_j^s s_\tau + c_j^{s,o} \epsilon \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \tau \in [0, T], \quad (146f)$$

$$g_{j,\tau|t}^o(M\mathbf{z}_{\tau|t}) + c^o(s_\tau + \epsilon) \leq 0, j \in \mathbb{N}_{[1, n^o]}, \tau \in [0, T], \quad (146g)$$

$$(\mathbf{z}_{T|t}, s_T, \epsilon) \in \mathcal{X}^f(\mathbf{x}_{t+T}^r), \quad (146h)$$

，其中估计状态为 $\hat{\mathbf{x}}_t$ ，阶段成本为 $\mathcal{J}^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^r\|_Q^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{u}^r\|_R^2$, $Q \succ 0, R \succ 0$ ，终端成本为 $\mathcal{J}^f(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^r\|_P^2$, $P \succ 0$ 。在此公式中， Q 和 R 是调节矩阵，而 P 应被适当地计算以显示实际的渐进收敛性；详见第 ?? 节。

类似于第 3 节中的 TMPC 公式，ROMPC 公式也应用于滚动时域。在这种情况下，闭环系统的控制律对于 $t \geq 0$ 定义如下：

$$\mathbf{u}_{t+\tau} = \kappa(\hat{\mathbf{x}}_{t+\tau}, \mathbf{z}_{\tau|t}^*, \mathbf{v}_{\tau|t}^*), \tau \in [0, T^s], \quad (147)$$

，其中控制律 $\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$ 在 (42) 中定义，将根据本节中提出的设计进行详细阐述。

ROMPC 和 RMPC 之间的主要区别在于实际状态 $\mathbf{x}$ 是隐藏的，我们只能测量有噪声的输出 $\mathbf{y}$ 。在 ROMPC 的公式中，一个合乎逻辑的选择是基于 $\mathbf{y}$ 在某个估计的 $\hat{\mathbf{x}}$ 处开始预测一个标称轨迹，而不是 $\mathbf{x}$ 。这个轨迹将满足收紧的约束 (146f)、(146g) 和 (146h)。然而，仅仅通过管束动力学 (41e) 收紧这些约束不足以保证闭环轨迹对非收紧约束的满足性，因为 $\mathbf{x}$ 可能比 $\mathbf{y}$ 更接近约束。因此，我们希望增加收紧程度，以考虑这种额外的观测器误差。

为了确定所需的额外收紧，误差 $\mathbf{y} - C\mathbf{x}$ 需要被界定。该界定由 (145) 中描述的紧致集 H 给出。此外，正如在第 5.2.3 节中进一步详细说明的，我们需要具有导数 $\frac{d}{dt}(\mathbf{y} - C\mathbf{x})$ 的显式表达式来确定收紧的大小。由于此信息不可用，我们设计了一个观测器来根据输出 $\mathbf{y}$ 估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ ，观测器的动态如下：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} := f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}), \quad (148)$$

，其中 $\mathbf{u}$ 在 (147) 中给出，并且观测器增益矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n^x \times n^y}$ 被用作对测量 $\mathbf{y}$ 的低通滤波器。

类似于在第 4.3 节中描述的性质，并且给定观察者 (148)，我们希望设计一个反馈律 $\kappa^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ ，使增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的管大小 s 保持不变。在这种情况下， $\kappa^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 和 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 基于一个以 $\hat{\mathbf{x}}$ 而不是 $\mathbf{x}$ 结束的测地线。如果系统满足以下假设，则存在这样的 $\kappa^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 和 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的组合：

Assumption 7 (Incremental stabilizability). 存在一个反馈律 $\kappa^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$ ，一个增量的 Lyapunov 函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ，其是连续可微的并且满足 $V^\delta(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0, \forall \mathbf{z} \in \mathcal{X}$ ，参数 $c^{\delta,1}, c^{\delta,u}, \rho > 0$ ，以及 Lipschitz 常数 $c_j^s > 0, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}$ 和 $c^o > 0$ ，使得以下性质对于所有 $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ ， $\mathbf{w} \in \mathbf{w}^b \oplus \mathcal{W}$ ，和 $\boldsymbol{\eta} \in H$ 都成立：

$$c^{\delta,1}\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|^2 \leq V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq c^{\delta,u}\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|^2, \quad (149a)$$

$$g_j^s(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - g_j^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \leq c_j^s \sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})}, j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}, \quad (149b)$$

$$g^o(M\hat{\mathbf{x}}) - g^o(M\mathbf{z}) \leq c^o \sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})}, \quad (149c)$$

$$\frac{d}{dt}V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}), \quad (149d)$$

与 $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})$ ， $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ ， $\mathbf{y}$ 定义在 (144) 中，并且 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b$ 。此外，下面的类范式不等式成立 $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^{n^x}$ ：

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)} \leq \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} + \sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}. \quad (150)$$

这个假设反映了与第 4.3 节中假设 ?? 相同的性质，唯一的区别是使用观察者 (148) 定义了 $\hat{\mathbf{x}}$ 而不是 $\mathbf{x}$ 。根据类似于第 4.3 节中的论点，我们知道 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的时间导数可以上界：

Property 3. 存在一个常数 $\bar{w}^o > 0$ ，对于任何 $(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{n^y} \times \mathbb{R}^{n^x} \times \mathcal{Z}$ 、任何 $\mathbf{w} \in \mathbf{w}^b \oplus \mathcal{W}$ 和任何 $\boldsymbol{\eta} \in H$ ，都有

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \leq -\rho\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} + \bar{w}^o, \quad (151)$$

，其中 $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})$ 、 $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ 、 $\mathbf{y}$ 在 (144) 中定义，并且 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}$ 。

请注意，在这种情况下使用了一个不同的常数 $\bar{w}^o \neq \bar{w}$ 。其中， $\bar{w}$ 说明了扰动的影响，而 $\bar{w}^o$ 则说明了扰动和测量噪声的共同影响。

根据性质 ??，我们知道 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的上界为管的大小 s ：

$$\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \leq s, \quad (152)$$

，其中管的动态由

$$\dot{s} = -\rho s + \bar{w}^o, \quad (153)$$

给出，这与 (146e) 相同。将其重写为时间的函数，得到

$$s_t = (1 - e^{-\rho t}) \frac{\bar{w}^o}{\rho}, \quad (154)$$

，并在取极限 $t \rightarrow \infty$ 时，导致最大管的大小为

$$\bar{s} = \frac{\bar{w}^o}{\rho}. \quad (155)$$

。因此， s 不会无限增长，结果管的大小 (155) 适合用于收紧约束。

注意，收缩属性 (149d) 以及相应的属性 ?? 和管道动力学 (146e) 用于对控制器误差

$$\delta := \hat{x} - z. \quad (156)$$

进行上界。因此，使用 s 进行紧缩结果为 $\hat{x}$ 提供闭环安全保证，而不是 x 。

为了考虑观察者误差

$$\epsilon := x - \hat{x}, \quad (157)$$

，我们可以做出以下假设：

Assumption 8 (Bounded observer error). 在那里观测增益矩阵 L 使得观测误差 $x - \hat{x}$ 是有界的，并由 $\sqrt{V^\delta(x, \hat{x})}$ 的 ϵ -子水平集描述：

$$\sqrt{V^\delta(x_t, \hat{x}_t)} \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (158)$$

。这一假设意味着我们可以额外收紧系统和障碍物避让约束，比例于 ϵ ，以保证 $\hat{x}$ 和 x 的闭环安全性。请注意，比例于 ϵ 的收紧仅适用于状态约束，而不适用于输入约束，因为控制律 (147) 独立于 x 。因此，我们引入额外的收紧常数 $c_j^{s,o}$ ， $j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ ：

$$c_j^{s,o} = \begin{cases} 0, & j \in \mathbb{N}_{[1, 2n^u]} \\ c_j^s, & j \in \mathbb{N}_{[2n^u+1, n^s]} \end{cases}. \quad (159)$$

类似于第 4.3 节，我们需要假设存在以下终端成分：

Assumption 9 (Terminal ingredients). 存在一个终端控制律 $\kappa^f(\hat{x}, r) : \mathcal{X} \times \bar{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{n^u}$ 和终端成本 $\mathcal{J}^f(z, x^r) : \mathcal{X} \times \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得对于所有 $z \in \mathcal{X}$ ，以下性质成立：带有采样时间 $T^s > 0$ 的

$$\mathcal{J}^f(z_{T^s+T|t}^*, x_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(z_{T|t}^*, x_{t+T}^r) \leq - \int_T^{T+T^s} \mathcal{J}^s(z_{\tau|t}^*, v_{\tau|t}^*, r_{t+\tau}) d\tau, \quad (160)$$

，位于 t 处的最优解 $(z_{\cdot|t}^*, v_{\cdot|t}^*)$ 对于所有 $t \geq 0$ 及其使用终端控制律 $\kappa^f(\hat{x}, r)$ 的扩展版本 $z_{T+\tau|t}^*$ 适用于 $\tau \in [0, T^s]$ ，定义于第 5.2.1 节中。

类似于第 4.3.2 节，除了关于终端控制规律 $\kappa^f(\hat{x}, r)$ 和终端成本 $\mathcal{J}^f(z, x^r)$ 的假设外，我们还希望设计终端集合 $\mathcal{X}^f(x^r)$ ，以便在 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 中分别满足收紧的系统 and 避障约束 (146f) 和 (146g)，并使得终端控制规律 $\kappa^f(\hat{x}, r)$ 确保 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 的鲁棒正不变性。 $\mathcal{X}^f(x^r)$ 的紧版本的具体形式在第 5.2.2 节中作为证明的一部分呈现，因此不包括在假设 ?? 中。

同样，上述假设允许我们证明递归可行性和轨迹跟踪。图 3 提供了与 ROMPC 公式 (146) 相关的证明直观理解。与 RMPC 情况相比，我们不能得到 x ，而只能通过带噪声的输出测量 y 估计得到状态 $\hat{x}$ 。然而，通过适当地设计观察者 (148)，我们知道 x 包含在围绕 $\hat{x}$ 的管道中。因此，系统和避障约束通过与这个管道大小成比例的附加项来收紧。此外，描述 $\hat{x}$ 和 z 之间差异的管道大小在预测范围的开始时从零开始，并且对于先前的最优解和候选解都严格大于第 4.3 节中设计的管道大小。考虑到适当设计的控制律和增量 Lyapunov 函数，候选解至少以因子 ρ 收缩到先前的最优解。因此，通过上述调整的管道尺寸，我们可以应用与第 ?? 节相似的推理来证明递归可行性。

由于反馈规律是基于 $\hat{x}$ 而不是 x ，因此相比使用 x 计算反馈规律的情况，候选解可能会更慢地收缩到先前的最优解。这种最坏情况下的影响导致了 x 与参考轨迹之间较大的跟踪误差。由于我们知道 $x - \hat{x}$ 是有界的，我们仍然可以得出结论：平均而言，跟踪误差会变小。然而，该界限比在第 ?? 节得到的界限不那么严格。

5.2.1 候选解

类似于第 4.3.1 节，定义候选解的目的是为了展示在时间 $t + T^s$ 时存在一个可行的，但不一定是最优的解，给定在时间 t 时 (146) 被成功解决。同样，这个候选解用于证明轨迹跟踪和递归可行性，但它不一定在实践中执行。

在鲁棒输出反馈情况下，我们选择一个类似于标称情况的候选解。为方便起见，我们为 $\tau \in [T, T + T^s]$ 定义

$$v_{\tau|t}^* = \kappa^f(z_{\tau|t}^*, r_{t+\tau}), \quad (161)$$

，其中 $z_{\tau|t}^*$ 由应用 (161) 给出的 (1)。

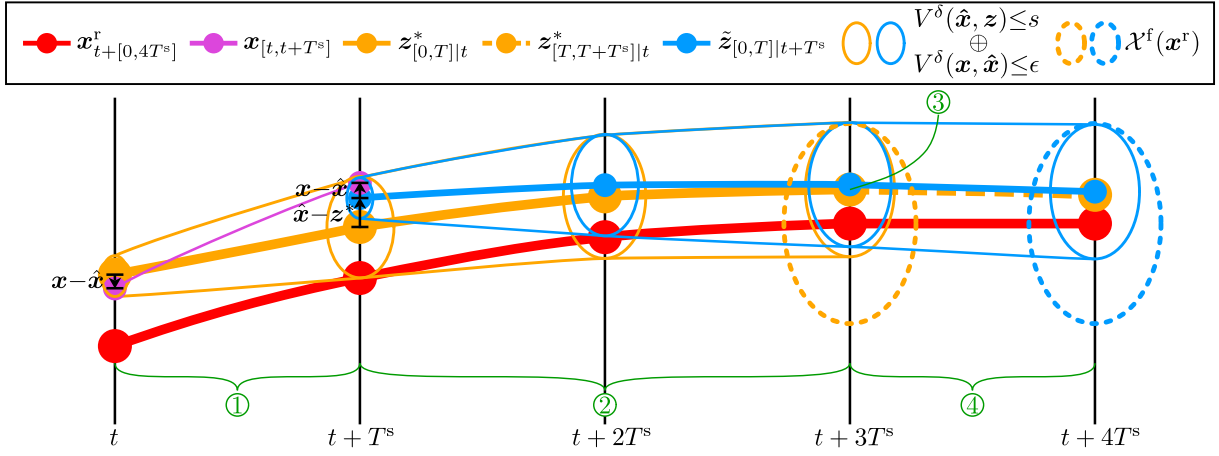


Figure 3: 对于一维参考轨迹 $\mathbf{x}^r_{t+[0,4T^s]}$ 、实际状态轨迹 $\mathbf{x}_{[t,t+T^s]}$ 、从估计状态 $\hat{\mathbf{x}}_t$ 开始的先前最佳解 $\mathbf{z}^*_{[0,T]|t}$ 、先前最佳解 $\mathbf{z}^*_{[T,T+T^s]|t}$ 的附加部分、从估计状态 $\hat{\mathbf{x}}_{t+T^s}$ 开始的候选解 $\tilde{\mathbf{z}}_{[0,T]|t+T^s}$ ，围绕 $\mathbf{z}^*_{[0,T]|t}$ 的管道 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}^*) \leq s$ 和 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \epsilon$ ，围绕 $\tilde{\mathbf{z}}_{[0,T]|t+T^s}$ 的管道 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}) \leq s$ 和 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \epsilon$ ，以及围绕对应于先前最佳解和候选解的参考轨迹的终端集合 $\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r)$ 进行可视化。我们再次设置 $T = 4T^s$ 。请注意，管道 s 和 ϵ 的 Minkowski 和被绘制在名义预测轨迹周围，因为这些管道的组合用于收紧约束。与图 2 相比，初始管道尺寸以 $\hat{\mathbf{x}}$ 为中心，具有非零大小，并包含状态 $\mathbf{x}$ 。同样， $\mathbf{w}$ 在区间 ① 期间影响系统。因此，差异 $\tilde{\mathbf{z}}_{T^s|t} - \hat{\mathbf{x}}_{t+T^s}$ 和 $\mathbf{x}_{t+T^s} - \hat{\mathbf{x}}_{t+T^s}$ 均是 $\mathbf{w}$ 、 $\boldsymbol{\eta}$ 和观察器动态 (148) 组合的结果。请注意，管道和终端集合被可视化为椭圆，以澄清其形状，然而在这种情况下，它们应被可视化为垂直线。

根据这些定义，我们可以写出在时间 $t + T^s$ 上预测区间 $\tau \in [0, T]$ 的候选项为

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0|t+T^s} = \hat{\mathbf{x}}_{t+T^s}, \quad (162a)$$

$$\tilde{s}_0 = 0, \quad (162b)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s} = \kappa(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{z}^*_{T^s+\tau|t}, \mathbf{v}^*_{T^s+\tau|t}), \quad (162c)$$

，分别根据 (146d) 和 (146e) 使用 $\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_{\tau|t+T^s}$ 和 $\dot{\tilde{s}}_\tau$ 。

注意，这个候选与第 4.3.1 节中的候选不同。主要区别在于初始估计状态。因此，与第 4.3.1 节中的 (55c) 相比，反馈控制律 (162c) 给出的值不同。

5.2.2 递归可行性证明

递归可行性证明遵循第 ?? 节中的相似论证，并附加技术细节以考虑测量噪声 $\boldsymbol{\eta}$ 。优化不是从测量状态 $\mathbf{x}$ 开始，而是从估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 开始，并且我们确保控制器误差 $\boldsymbol{\delta}$ 包含在 δ 的次水平集内，而观测器误差 $\boldsymbol{\epsilon}$ 包含在 ϵ 的次水平集内 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 。

为了证明递归可行性，首先注意到初始状态、初始管道、系统动态和管道动态约束通过 (162) 显然是满足的。同样地，我们需要展示对于 $\tau \in [0, T]$ ，系统约束 (146f)、障碍物避免约束 (146g) 以及终端集约束 (146h) 也是满足的。

类似于第 ?? 节中的过程，我们将区间分成两个子区间，以显示对 (146f) 和 (146g) 的满足： $\tau \in [0, T - T^s]$ 和 $\tau \in [T - T^s, T]$ 。通过将 $\bar{\mathbf{w}}$ 替换为 $\bar{\mathbf{w}}^o$ ，并额外以与 ϵ 成比例的因子收紧状态约束，我们在遵循与第 ?? 节相同的过程后，获得系统和避障约束的简单满足性。注意，在这种情况下，附加收紧项与 ϵ 成比例，在 (61) 中相互抵消，并且附录 ?? 中相同的证明适用于 s_{T^s} 的不同表达式：

$$s_{T^s} = \left(1 - e^{-\rho T^s}\right) \frac{\bar{\mathbf{w}}^o}{\rho}. \quad (163)$$

终端集约束满足性对于 $\tau \in [T - T^s, T]$

由于相对于第 4 节的紧缩量与 ϵ 成比例增加，我们需要在终端集中考虑这个附加的管道大小。因此，终端集现在由

$$\mathcal{X}^f(\mathbf{x}^r) := \left\{ \mathbf{z} \in \mathcal{X}, s_T \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R} \mid \sqrt{V^\delta(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r)} + s_T + \epsilon \leq \alpha \right\}. \quad (164)$$

给出。为了显示 (146h) 在 $\tau \in [T - T^s, T]$ 上的终端集约束的满足性，我们遵循第 ?? 节的备注 10 中概述的类似步骤。我们首先展示在 $t + T^s$ 时，位于 $\tau = T - T^s$ 的终端集约束 (164) 是满足的。这给出了类似于在 $\tau = 0$ 处评估的 (81a) 的不等式：

$$\alpha - s_T - \epsilon + e^{-\rho(T-T^s)} s_{T^s} \leq \alpha - s_{T-T^s} - \epsilon, \quad (165)$$

或者，可以等价地写为

$$s_{T-T^s} \leq s_T - e^{-\rho(T-T^s)} s_{T^s}. \quad (166)$$

。这与 (67) 相同的表达式，它通过附录 ?? 中的证明是显然成立的，其中 s_{T^s} 由 (163) 给出。

附录 C 证明了当 $\alpha \geq \frac{\bar{w}^o}{\rho} + \epsilon$ 成立时，终端集 (164) 是保持不变的。因此，我们可以得出结论，在 $t + T^s$ 的条件下， $\tau \in [T - T^s, T]$ 的 α 的下界也满足终端集约束。

对于 $\tau \in [T - T^s, T]$ 的系统约束满足性分析

根据第 ?? 节中的详细推理，并利用附录 ?? 中的证明以及 (75) 不变的事实，在以下假设下，候选系统约束对于 $\tau \in [T - T^s, T]$ 是满足的：

Assumption 10 (System constraints tightening for reference trajectory). 该参考轨迹满足收紧的系统约束，即，(6) 成立，其中 $g_j^{r,s}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$ 由下式给出

$$g_j^{r,s}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = g_j^s(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + c_j^s \frac{\bar{w}^o}{\rho} + c_j^{s,o} \epsilon, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}, \quad (167)$$

，其中 c_j^s 和 $c_j^{s,o}$ 分别定义在 (149b) 和 (159) 中。

这与第 ?? 节中的假设 5 相同，只是我们可以访问 $\hat{\mathbf{x}}$ 而不是 $\mathbf{x}$ ，因而对 α 的下限更大。

障碍物避让约束条件的满足对于 $\tau \in [T - T^s, T]$

与对于系统约束条件满足类似的推理，候选障碍物避让约束在下述假设下对于 $\tau \in [T - T^s, T]$ 得到满足：

Assumption 11 (Obstacle avoidance constraints tightening for reference trajectory). 参考轨迹满足收紧的避障约束，即，(8) 成立， $g_j^{r,o}(\hat{\mathbf{p}})$ 由

$$g_j^{r,o}(\hat{\mathbf{p}}) = g_j^o(\hat{\mathbf{p}}) + c^o \alpha, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^o]}, \quad (168)$$

给出，其中 c^o 在 (149c) 中定义和 $\alpha \geq \frac{\bar{w}^o}{\rho} + \epsilon$ 。

同样地，此假设与第 ?? 节中的假设 6 相同，唯一的区别是我们有 $\hat{\mathbf{x}}$ 的可用性而不是 $\mathbf{x}$ ，相应地， α 的下限更大。□

轨迹跟踪证明遵循第 ?? 节中详细步骤的步骤。唯一的不同是我们展示了从 $\hat{\mathbf{x}}$ 优化的轨迹的跟踪，而不是从 $\mathbf{x}$ 优化的轨迹。相应地，我们可以遵循第 ?? 节中概述的相同证明，但例外的是我们现在在假设 ?? 中利用了 (160)，而不是在假设 ?? 中利用的 (53)。阶段成本差异的上限现在由

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^s(\tilde{\mathbf{z}}_{\tau|t+T^s}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau|t+T^s}, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) - \mathcal{J}^s(\mathbf{z}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{v}_{T^s+\tau|t}^*, \mathbf{r}_{t+T^s+\tau}) \\ & \leq L^{\mathcal{J}^s, \text{xu}} e^{-\rho\tau} \left(1 - e^{\rho T^s}\right) \frac{\bar{w}^o}{\rho} =: \alpha_\tau^s(\rho, \bar{w}^o, T^s), \end{aligned} \quad (169)$$

给出，而不是 (98)，且终端成本差异的上限由

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^f(\tilde{\mathbf{z}}_{T|t+T^s}, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) - \mathcal{J}^f(\mathbf{z}_{T^s+T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T^s+T}^r) \\ & \leq L^{\mathcal{J}^f} e^{-\rho T} \left(1 - e^{\rho T^s}\right) \frac{\bar{w}^o}{\rho} =: \alpha^f(\rho, \bar{w}^o, T^s), \end{aligned} \quad (170)$$

给出，而不是 (101)。遵循与第 ?? 节中相似的步骤，但对 $\alpha_\tau^s(\rho, \bar{w}^o, T^s)$ 、 $\alpha^f(\rho, \bar{w}^o, T^s)$ 和 $\bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}^o, T^s)$ 使用不同的表达式，将 (107) 更改为以下上限：

$$\|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 \stackrel{(a)}{\leq} c^{t,1} \|\mathbf{x}_\tau - \hat{\mathbf{x}}_\tau\| + c^{t,2} \|\hat{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{z}_{\tau-t|t}^*\| + \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 \quad (171a)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} c^{t,3} \epsilon + c^{t,4} s_\tau + \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2, \quad (171b)$$

其中 (a) 是通过使用常数 $c^{t,1}$ 和 $c^{t,2}$ 的 Lipschitz 界限得到的，(b) 是通过常数 $c^{t,3}$ 和 $c^{t,4}$ 在使用 (43a)，(158)，(152) 和 (154) 的组合上的范数得到的其他 Lipschitz 界限。因此，我们可以写出一个与 (108) 相似的上限：

$$c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau \leq c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau + c^{t,4} s_\tau + c^{t,3} \epsilon d\tau \quad (172a)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(a)}{=} c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} \|\mathbf{z}_{\tau-t|t}^* - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau + c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} c^{t,4} s_\tau d\tau \\ & \quad + c^{\mathcal{J},d} \int_t^{t+T^s} c^{t,3} \epsilon d\tau \end{aligned} \quad (172b)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} \mathcal{J}_t^* - \mathcal{J}_{t+T^s}^* + \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}^o, T^s), \quad (172c)$$

与 $\bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}^o, T^s) := \bar{\alpha}^{s,f}(\rho, \bar{w}^o, T^s) + c^{\mathcal{J},d} c^{t,4} \left(T^s - \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho T^s}) \right) \frac{\bar{w}^o}{\rho} + c^{\mathcal{J},d} T^s c^{t,3} \epsilon$ 一起，并且其中 (a) 是通过写出积分表达式得到的，(b) 是通过 (106) 得到的。遵循与第 ?? 节相同的步骤，我们得到上限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau}{t} \leq \frac{\mathcal{J}_0^* - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_t^*}{c^{\mathcal{J},d} t} + \frac{1}{c^{\mathcal{J},d} T^s} \bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}^o, T^s), \quad (173)$$

通过在 $\frac{\int_0^{2T^s} \|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\tau^r\|_Q^2 d\tau}{t}$ 上应用 Barbalat 引理 [29]，我们得出结论，在平均情况下，跟踪误差 $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^r\|$ 随时间变小，在这种情况下与 $\bar{\alpha}^{s,f,1}(\rho, \bar{w}^o, T^s)$ 成比例。□

这一节将详细介绍

- 需要满足假设 2 的障碍物规避约束；
- 增量李亚普诺夫函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 及其对应的 Lipschitz 常数 $c_j^s, c_j^{s,o}, j \in \mathbb{N}_{[1,ns]}$ 和 c^o ，需满足假设 ?? 和 ??；
- 终端成分，需要满足假设 ??；
- 参考轨迹需要满足假设 10 和 11。

的设计：

5.2.3 设计以满足假设

障碍物避免约束设计

为了证明递归可行性，我们需要障碍物避免约束满足假设 2。我们可以通过遵循与第 ?? 节中所述相同的设计来实现这一点。

增量稳定性设计

类似于在第 4.3.2 节中的论述，增量稳定性设计的目标是找到常数度量 P^δ 和状态依赖的反馈 $K^\delta(\gamma^x(s))$ ，以便我们可以构造增量李雅普诺夫函数的上界。由于在这种情况下管道动力学是为 $\hat{\mathbf{x}}$ 而不是 $\mathbf{x}$ 定义的，我们希望找到 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的上界而不是以下形式的 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ：

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq 2\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \left(-\rho\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} + \bar{w}^o \right) = -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + 2\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \bar{w}^o, \quad (174)$$

，其中增量李雅普诺夫函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 定义为

$$V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) := (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})^\top P^\delta (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}), \quad (175)$$

，测地线 $\gamma^x(s)$ 定义在 (128)，控制律 $\kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ 定义为

$$\kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \gamma^u(1) = \mathbf{v} + \int_0^1 K^\delta(\gamma^x(s))(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}) ds, \quad (176)$$

，使得 (146e) 是管道动力学的有效方程。为此，我们首先定义闭环观测器动力学：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}}) \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C(\mathbf{x} + \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})), \end{aligned} \quad (177)$$

，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 定义在 (144)。

使用以下简写符号并利用 (177)：

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} := \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{z}} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} &= f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) - (f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - E\mathbf{w}^b) \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})), \end{aligned} \quad (179)$$

$$A^{cl} := A(\gamma^x, \gamma^u) + B(\gamma^x, \gamma^u) K^\delta(\gamma^x), \quad (180)$$

我们可以对 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的时间导数进行上界处理,

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) = \dot{\boldsymbol{\delta}}^\top P^\delta \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^\top P^\delta \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (181a)$$

$$= 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (181b)$$

$$= 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta (f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))) \quad (181c)$$

$$= 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta (f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\mathbf{z}, \mathbf{v})) + 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \quad (181d)$$

$$\stackrel{(a)}{\leq} 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta A^{\text{cl}} \boldsymbol{\delta} + 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \quad (181e)$$

$$\stackrel{(b)}{\leq} -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + 2\boldsymbol{\delta}^\top P^\delta L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \quad (181f)$$

$$= -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + 2\boldsymbol{\delta}^\top P^{\delta^{\frac{1}{2}}} P^{\delta^{\frac{1}{2}}} L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \quad (181g)$$

$$\leq -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + 2\|\boldsymbol{\delta}\|_{P^\delta} \|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta} \quad (181h)$$

$$= -2\rho V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) + 2\sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta} \quad (181i)$$

其中 (a) 是通过知道存在一个 $s \in [0, 1]$ 而获得的, 使得该表达式通过 MVT 成立, 并且 (b) 是通过收缩 LMI (137c) 获得的. 应用 sqrt 算子到最后一个表达式得到

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} \leq -\rho \sqrt{V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})} + \|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta}. \quad (182)$$

。将该方程与 (146e) 相比较, 表明我们需要为所有 $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{X}^2 \times H$ 对 $\|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta}$ 进行上界处理, 以获得 $\bar{w}^\circ$ 应当对 $\|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta}$ 进行上界处理. 我们设计具有有界特征值的 L 并且我们知道 $\boldsymbol{\eta}$ 是有界的, 因为 $\boldsymbol{\eta} \in H$ 与紧致的 H 。这使我们有必要展示对所有 $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{X}^2$ 来说 $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 是有界的。

显示 $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 有界的一个充分条件是施加 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ (158) 的下水平集是 RPI。类似于 RPI LMI (137d), 这给出了以下 LMI:

$$\begin{bmatrix} X^\delta (A(\boldsymbol{\zeta}) - LC)^\top + (A(\boldsymbol{\zeta}) - LC) X^\delta + \lambda^\epsilon X^\delta & E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta} \\ (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top & -\lambda^\epsilon \epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (183)$$

, 乘子为 $\lambda^\epsilon \geq 0$, 并且对于 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H)$ 。所谓的 ϵ -RPI LMI 的证明在附录 D 中提供。

Remark 18. 由于 LMI (183) 强制 (158) 成为 RPI, 因此以下结果仅当在 $t = 0$ 满足 (158) 时有效, 即 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{x}}_0)} \leq \epsilon$ 。

给定满足这个 LMI 的度量 P^δ , 我们可以将 $\|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta}$ 的上限写为

$$\|L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))\|_{P^\delta} = \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \right\| \quad (184a)$$

$$= \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LF\boldsymbol{\eta} + P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LC(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\| \quad (184b)$$

$$\leq \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LF\boldsymbol{\eta} \right\| + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LC(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\| \quad (184c)$$

$$= \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LF\boldsymbol{\eta} \right\| + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LCP^{\delta^{-\frac{1}{2}}} P^{\delta^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\| \quad (184d)$$

$$\leq \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LF\boldsymbol{\eta} \right\| + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LCP^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\| \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\| \quad (184e)$$

$$= \|LF\boldsymbol{\eta}\|_{P^\delta} + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LCP^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{P^\delta} \quad (184f)$$

$$\leq \|LF\boldsymbol{\eta}\|_{P^\delta} + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LCP^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\| \epsilon, \quad (184g)$$

, 其中包括 $\boldsymbol{\eta} \in H$ 。由于 H 是一个凸多面体集, 仅需在 H 的顶点处计算此表达式。因此, $\bar{w}^\circ$ 由

$$\bar{w}^\circ := \max_{\boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H)} \|LF\boldsymbol{\eta}\|_{P^\delta} + \left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} LCP^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\| \epsilon. \quad (185)$$

给出

LMI (183) 也可以用于使用类似 (136) 的控制器误差的 RPI LMI 来优化管的形状。我们称这个 LMI 为 δ -RPI LMI。其表示为

$$\begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda^\delta X^\delta & LCX^\delta & LF\eta \\ (LCX^\delta)^\top & -\lambda^{\delta,\epsilon} X^\delta & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & \lambda^{\delta,\epsilon}\epsilon^2 - \lambda^\delta\delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (186)$$

，其中包含 $\zeta \in \mathcal{Z}$ 、 $\eta \in \text{vert}(H)$ 和乘子 $\lambda^\delta, \lambda^{\delta,\epsilon} \geq 0$ 。与第 4.3.2 节的设计类似，我们可以在不失一般性的情况下设置 $\delta = 1$ 。注意，在 LMI (183) 中 ϵ 不一定等于 1。相反，应满足 $\lambda^\delta\delta^2 \geq \lambda^{\delta,\epsilon}\epsilon^2$ 以满足 (186) 的要求。由于这个 LMI 在线性上依赖于 η ，并且集合 H 是凸的，因此只需在 H 的顶点处检查 (186) 即可。附件 E 提供了 (186) 的证明。

与 RMPC 情况相比，我们希望解决相同的 SDP，但用 ϵ -RPI LMI (183) 和 δ -RPI LMI (186) 的组合来替换 RPI LMI (136)，并根据附加状态约束收紧与 ϵ 成比例，在成本函数中对决策变量 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[2n^u+1, n^s]}$ 和 c^o 进行不同的加权：收缩率

$$\min_{\substack{X^\delta, Y^\delta(\mathbf{x}) \\ c_j^{s,2}, c^{o,2}}} (1 + \epsilon^2)c^{o,2} + \sum_{j=1}^{2n^u} c_j^{c,s} c_j^{s,2} + (1 + \epsilon^2) \sum_{j=2n^u+1}^{n^s} c_j^{c,s} c_j^{s,2}, \quad (187a)$$

$$\text{s. t. } X^\delta \succeq 0, \quad (187b)$$

$$A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + 2\rho X^\delta \preceq 0, \quad (187c)$$

$$\begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda^\delta X^\delta & LCX^\delta & LF\eta \\ (LCX^\delta)^\top & -\lambda^{\delta,\epsilon} X^\delta & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & \lambda^{\delta,\epsilon}\epsilon^2 - \lambda^\delta\delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (187d)$$

$$\begin{bmatrix} X^\delta (A(\zeta) - LC)^\top + (A(\zeta) - LC) X^\delta + \lambda^\epsilon X^\delta & Ew^0 - LF\eta \\ (Ew^0 - LF\eta)^\top & -\lambda^\epsilon \epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (187e)$$

$$\begin{bmatrix} c_j^{s,2} & L_j^s \begin{bmatrix} Y^\delta(\mathbf{x}) \\ X^\delta \end{bmatrix} \\ \left(L_j^s \begin{bmatrix} Y^\delta(\mathbf{x}) \\ X^\delta \end{bmatrix} \right)^\top & X^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}, \quad (187f)$$

$$\begin{bmatrix} c^{o,2} I^{n^p} & MX^\delta \\ (MX^\delta)^\top & X^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (187g)$$

$$\zeta \in \mathcal{Z}, \quad w^0 \in \text{vert}(\mathcal{W}), \quad \eta \in \text{vert}(H),$$

为 $\rho > 0$ 和可以通过双分法在此 SDP 上计算的乘数 $\lambda^\delta, \lambda^{\delta,\epsilon}, \lambda^\epsilon \geq 0$ ，用户选择的观测器增益矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n^x \times n^y}$ ，和子集水平集 $\delta, \epsilon > 0$ 。类似于第 4.3.2 节中的设计，我们设置 $\delta = 1$ 并确保 $\lambda^\delta\delta^2 \geq \lambda^{\delta,\epsilon}\epsilon^2$ 成立。此 SDP 是半无限的，因此我们需要在网格点和顶点处评估表达式，在这种情况下为 $\mathcal{Z}$ 、 $\mathcal{W}$ 和 H ，以同时考虑扰动和测量噪声的影响。

Remark 19. 为了减少计算时间，我们按照 Remark ?? 中概述的相同程序拆分 LMI (187d)：

$$\begin{bmatrix} 0^{n^x} & 0^{n^x} & LF\eta \\ 0^{n^x} & 0^{n^x} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \preceq \bar{H}, \quad \eta \in \text{vert}(H), \quad (188)$$

$$\bar{H} + \begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda^\delta X^\delta & LCX^\delta & \mathbf{0} \\ (LCX^\delta)^\top & -\lambda^{\delta,\epsilon} X^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda^{\delta,\epsilon}\epsilon^2 - \lambda^\delta\delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \zeta \in \mathcal{Z}. \quad (189)$$

类似地，我们如下拆分 LMI (187e)：

$$\begin{bmatrix} 0^{n^x} & Ew^0 \\ (Ew^0)^\top & 0 \end{bmatrix} \preceq \bar{W}, \quad w^0 \in \text{vert}(\mathcal{W}), \quad (190)$$

$$\begin{bmatrix} 0^{n^x} & -LF\eta \\ (-LF\eta)^\top & 0 \end{bmatrix} \preceq \bar{H}_1, \quad \eta \in \text{vert}(H), \quad (191)$$

$$\bar{W} + \bar{H}_1 + \begin{bmatrix} X^\delta (A(\zeta) - LC)^\top + (A(\zeta) - LC) X^\delta + \lambda^\epsilon X^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda^\epsilon \epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \zeta \in \mathcal{Z}. \quad (192)$$

Remark 20. (187a) 的一个替代目标是

$$\min_{\substack{X^\delta, Y^\delta(\mathbf{x}) \\ c_j^{s,2}, c^{o,2}, \epsilon^2}} c^{c,o} c^{o,2} + \sum_{j=1}^{n^s} c_j^{c,s} c_j^{s,2} + c^\epsilon \epsilon^2, \quad (193)$$

，其中 ϵ^2 是一个额外的决策变量， c^ϵ 是一个高惩罚项。最小化该目标会导致 ϵ 的下界，使得 (187) 可行。因此，与用户选择 ϵ 值来优化 (187) 的情形相比，这可能带来较不保守的约束收紧。

Remark 21. 注意，(187) 是在 X^δ 和 L 中的双线性。因此，一个自然的解决方案是迭代地解 X^δ 和 L 。对于一个给定的矩阵 $P^\delta = X^{\delta^{-1}}$ ，我们使用以下 SDP 来优化 L ：

$$\min_{\substack{\delta^2, \epsilon^2, l^2 \\ \bar{H}, \bar{H}_1}} \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 + \lambda^\delta \delta^2 + c^l l^2, \quad (194a)$$

$$\text{s. t. (187d),} \quad (194b)$$

$$(187e), \quad (194c)$$

$$\begin{bmatrix} P^\delta & P^\delta L C \\ (P^\delta L C)^\top & l^2 P^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (194d)$$

$$\zeta \in \mathcal{Z}, \quad \mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W}), \quad \boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H),$$

，附加决策变量 l ，以致于

$$\left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} L C P^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\| \leq l, \quad (195)$$

通过 LMI (194d) 强制执行，如附录 F 中所证明，并且相应的惩罚项 c^l 。通过最小化 l ，我们最小化了 $\left\| P^{\delta^{\frac{1}{2}}} L C P^{\delta^{-\frac{1}{2}}} \right\|$ 的上界，从而也减少了由 (185) 给出的 $\bar{w}^o$ 计算中的保守性。

总之，通过成功求解 (187)，我们可以找到矩阵 P^δ 和 $K^\delta(\mathbf{x})$ ，使得增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 由 (175) 给出，并满足 (149a) 和 (150)。此外，收缩 LMI (187c)、RPI LMIs (187d) 和 (187e)，以及 Lipschitz LMIs (187f) 和 (187g) 的设计也满足性质 (149b)、(149c) 和 (149d)。因此，我们可以总结，该设计满足假设 ??。此外，假设 ?? 直接通过设计 ϵ -RPI LMI (183) 得以满足。

终端成分设计

类似于在第 4.3.2 节中提出的终端成分设计，我们需要设计一个适当的终端成本 $\mathcal{J}^f(\mathbf{z}, \mathbf{x}^r)$ 以满足假设 ??。在这种情况下，我们定义终端控制律为

$$\kappa^f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{r}) = \mathbf{u}^r + \kappa^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^r) = \mathbf{u}^r + \int_0^1 K^\delta(\boldsymbol{\gamma}^x(s)) ds (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^r). \quad (196)$$

。此外，矩阵 P 需要定义为满足下降界限 (160)：

$$\frac{d}{dt} ((\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})^\top P (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z})) \leq -\mathcal{J}^s(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad (197)$$

其中 $\dot{\hat{\mathbf{x}}} := f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(\mathbf{y} - C\hat{\mathbf{x}})$ 和 $\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + E\mathbf{w}^b$ 。同样，我们通过求解 SDP (143) 找到具有最低特征值的 P 。

因此，我们可以得出结论，假设 ?? 得到了满足。

参考轨迹设计

类似于第 4.3.2 节中的参考轨迹设计，假设 10 和 11 可以轻松满足条件，如果所使用的用于生成参考轨迹的系统和障碍物规避约束根据 (167) 和 (168) 使用紧缩常数 $c_j^s, j \in \mathbb{N}_{[1, n^s]}$ 和 c^o 分别从 SDP (187) 构造，并且 α 满足在 (239) 中计算的下界。相应地，围绕参考轨迹合理设计终端集 (164)，以确保在任何时候闭环系统和障碍物规避约束的满足。

总之，所提出的 ROMPC 方案是一个有效的工具，可以为具有受扰动动力学 (38) 和有噪声输出测量 (144) 的移动机器人提供动态可行参考轨迹跟踪的安全保障。该方案基于这样一个理念：扰动和测量噪声的影响可以通过增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的 s 子水平集和增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 的 ϵ 子水平集的组合来加以限制。这个上界从 ϵ 开始，以考虑观察器误差，并使用 s 的动态进行增长，这导致比在第 4 小节中构造的更大的管道大小。如果我们使用这个增加的管道尺寸来收紧从估计状态 $\hat{\mathbf{x}}$ 开始的轨迹优化所施加的系统和障碍回避约束，我们可以保证闭环系统 $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 始终满足实际的系统和障碍回避约束。在这项工作中，两种 Lyapunov 函数使用相同的度量。通常，可以考虑使用不同的度量来量化扰动和测量噪声 [21] 的影响。通过基于 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 和 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 构造一个最小正不变终端集，证明了递归可行性。这个表达式与第 ?? 小节中的类似，包括了测量噪声的影响。此外，类似于第 ?? 小节，通过证明可以使用在 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 和 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 中使用的加权矩阵 P^δ 计算终端成本矩阵 P ，证明了轨迹跟踪。跟踪误差的上界比在第 ?? 小节得出的更松弛，这是由测量噪声 $\boldsymbol{\eta}$ 的影响引起的。

A 集 (30) 不变性的证明

简而言之, (30) 尝试找到 α 的最大值, 使得系统约束 (2) 对满足终端集约束 (13) 的所有状态均成立。让我们定义从参考状态 $\mathbf{x}^r$ 指向状态 $\mathbf{x}$ 的向量为

$$\boldsymbol{\delta} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^r. \quad (198)$$

终端集约束 (13) 现在可以重写为

$$\|\boldsymbol{\delta}\|_{P(\mathbf{r})}^2 = \boldsymbol{\delta}^\top P(\mathbf{r}) \boldsymbol{\delta} \leq \alpha^2. \quad (199)$$

此外, 让我们定义控制输入中的误差为

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^r \stackrel{(11)}{=} K(\mathbf{r})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = K(\mathbf{r})\boldsymbol{\delta}. \quad (200)$$

因此, 在终端集合中, 应满足

$$L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \leq l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (201)$$

由于终端集合由 (199) 描述, 我们希望以下蕴涵成立以满足假设 ?? 中的 (14b) :

$$\boldsymbol{\delta}^\top P(\mathbf{r}) \boldsymbol{\delta} \leq \alpha^2 \Rightarrow L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \leq l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}, \quad \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}}, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (202)$$

通过定义 $\tilde{\boldsymbol{\delta}} := P(\mathbf{r})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\delta}$ 我们得到

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\delta}} \leq \alpha^2 \Rightarrow L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \leq l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}, \quad \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}}, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (203)$$

将蕴涵左侧平方并取范数得

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\delta}} \leq \alpha^2 \Rightarrow \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right\|^2 \leq \|l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}\|^2, \quad \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{Z}}, \quad j \in \mathbb{N}_{[1,n^s]}. \quad (204)$$

我们现在可以写作

$$\left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right\|^2 \stackrel{(a)}{\leq} \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \|\tilde{\boldsymbol{\delta}}\|^2 \quad (205)$$

$$\stackrel{(b)}{=} \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^\top \tilde{\boldsymbol{\delta}} \quad (206)$$

$$\stackrel{(199)}{\leq} \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \alpha^2 \quad (207)$$

$$\stackrel{(c)}{=} \left\| \left(L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \right)^\top \right\|^2 \alpha^2 \quad (208)$$

$$\stackrel{(d)}{=} \left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r})^\top I^{n^x \top} \end{bmatrix} L_j^{r,s \top} \right\|^2 \alpha^2, \quad (209)$$

其中 (a) 基于柯西-施瓦茨不等式, (b) 基于内积的定义, (c) 基于矩阵的范数等于其转置的范数这一事实, (d) 基于转置的定义以及 $P(\mathbf{r})$ 对称这一事实。因此, 以下蕴涵成立:

$$\left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r})^\top I^{n^x \top} \end{bmatrix} L_j^{r,s \top} \right\|^2 \alpha^2 \leq (l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r})^2 \Rightarrow \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right\|^2 \leq (l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r})^2. \quad (210)$$

两边取平方根得到

$$\left\| P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r})^\top I^{n^x \top} \end{bmatrix} L_j^{r,s \top} \right\| \alpha \leq (l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}) \Rightarrow \left\| L_j^{r,s} \begin{bmatrix} K(\mathbf{r}) \\ I^{n^x} \end{bmatrix} P(\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\boldsymbol{\delta}} \right\| \leq (l_j^s - L_j^{r,s} \mathbf{r}). \quad (211)$$

因此, 满足系统约束在所有满足终端集约束 (13) 的状态下的 α 的最大值, 通过求解线性规划 (30) 可得。□

直观地, (67) 表示候选管的尺寸上限从 $s_{T^s+\tau}$ 开始比 s_{T^s} 低, 并以因子 $e^{-\rho\tau}$ 向 $s_{T^s+\tau}$ 指数收缩。因此, 候选管尺寸的上限以因子 ρ 收缩到先前的最优管尺寸。这是合理的, 因为管的动力学 (41e) 以指数方式趋向于 $\frac{\bar{w}}{\rho}$ 的最大值。

让我们用归纳法证明这一点。在 $\tau = 0$ 处, (67) 显然成立。假设 (67) 在 $\tau = 0$ 处成立, 我们可以证明它也成立于 $\tau > 0$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s}) \stackrel{(41e)}{=} -\rho s_\tau + \bar{w} + \rho s_{T^s+\tau} - \bar{w} - \rho e^{-\rho\tau} s_{T^s} \quad (212a)$$

$$= -\rho (s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s}) \quad (212b)$$

$$\stackrel{(67)}{\geq} 0. \quad (212c)$$

由于 $s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s}$ 的值初始为负, 其导数在 $s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s} < 0$ 为正, 在 $s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s} = 0$ 为零, $s_\tau - s_{T^s+\tau} + e^{-\rho\tau} s_{T^s}$ 指数收敛于零。因此, 我们可以得出结论, (67) 在 $\tau \geq 0$ 成立。□

为了证明终端集合 (75) 对于 $\tau \geq 0$ 是保持不变的, 我们需要展示如果在预测时间 t 时终端集约束在时间 T 满足, 即

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r)} + s_T \leq \alpha, \quad (213)$$

, 那么该终端集约束也应在时间 t 对于 $T + \tau, \tau \geq 0$ 满足, 即

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} + s_{T+\tau} \leq \alpha. \quad (214)$$

。由于在预测范围的这一部分没有干扰因素, 我们知道终端控制律 $\kappa^f(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)$ 确保了 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)}$ 至少收缩了 ρ , 如 (46) 所示。考虑到终端集满足条件 (213), 可以得到以下上界:

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T). \quad (215)$$

如果终端集是不变的, 该方程的右侧由 (214) 导出的上界为 $\alpha - s_{T+\tau}$:

$$e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T) \leq \alpha - s_{T+\tau}, \quad (216)$$

对于 $\tau = 0$ 来说, 这是显而易见满足的。对 $\tau > 0$ 进行类似于 (81) 的不等式计算, 得出

$$e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T) \leq \alpha - s_{T+\tau} \quad (217a)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq -e^{-\rho\tau} s_T + s_{T+\tau} \quad (217b)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq -e^{-\rho\tau} (1 - e^{-\rho T}) \frac{\bar{w}}{\rho} + (1 - e^{-\rho(T+\tau)}) \frac{\bar{w}}{\rho} \quad (217c)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq (-e^{-\rho\tau} + e^{-\rho(T+\tau)} + 1 - e^{-\rho(T+\tau)}) \frac{\bar{w}}{\rho} \quad (217d)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq (1 - e^{-\rho\tau}) \frac{\bar{w}}{\rho} \quad (217e)$$

$$\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}. \quad (217f)$$

。因此, 终端集合 (75) 是不变的, 前提是 $\alpha \geq \frac{\bar{w}}{\rho}$ 。 □

B RPI LMI (136) 的证明

附录的目的是设计一个 LMI, 以确保子水平集 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \delta^2$ 对于受到干扰的动力学 (38) 和 $\mathbf{w} = \mathbf{w}^b + \mathbf{w}^0 \in \mathbf{w}^b \oplus \mathcal{W}$ 是 RPI, 其中 $\mathcal{W}$ 由 (39) 给出。给定状态无关的 P^δ , $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 由 (131) 给出。因此, 我们希望以下性质成立:

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0, \quad \forall \delta^\top P^\delta \delta \geq \delta^2, \quad \forall \mathbf{w}^0 \in \mathcal{W}, \quad (218)$$

, 其中 δ 在 (47) 中定义。

利用 P^δ 的状态独立性, 我们可以去除积分并简化 (122b) 中 $\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 的上界如下:

$$\delta^\top (A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}}) \delta + \delta^\top P^\delta E \mathbf{w}^0 + (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta \delta \leq 0, \quad (219)$$

或者，或者，

$$\begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (220)$$

。我们希望这个不等式对所有满足 $\delta^\top P^\delta \delta \geq \delta^2$ 的 δ 和所有 $\mathbf{w}^0 \in \mathcal{W}$ 成立。由于 $\mathcal{W}$ 是一个多面体集且 $\mathbf{w}^0$ 在线性出现在上述不等式中，只需检查不等式是否对 $\mathcal{W}$ 的顶点成立，即，不等式应对所有 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 成立。

为了加强这些特性，我们可以使用 S-程序，该程序指出 $\lambda F_1 - F_2 \succeq 0, \lambda \geq 0$ 是使蕴涵 $\mathbf{x}^\top F_1 \mathbf{x} \leq 0 \implies \mathbf{x}^\top F_2 \mathbf{x} \leq 0$ 成立的充分条件 [48]。在这种情况下，我们利用 S-程序来强制以下蕴涵成立：

$$\delta^\top P^\delta \delta \geq \delta^2 \implies \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (221)$$

对这一蕴涵左侧的项重新排序得到

$$\delta^2 - \delta^\top P^\delta \delta \leq 0, \quad (222)$$

，可以写成矩阵形式如

$$\begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (223)$$

。现在，我们可以应用 S-程序，得到

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (224a)$$

$$F_1 := \begin{bmatrix} -P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix}, \quad (224b)$$

$$F_2 := \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & 0 \end{bmatrix}, \quad (224c)$$

。通过计算这个 LMI 得到

$$\lambda \begin{bmatrix} -P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & 0 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (225)$$

，使用 $\lambda \geq 0$ 进行前后乘得到

$$-\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda P^\delta & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (226a)$$

$$\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda P^\delta & P^\delta E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (226b)$$

。填入 A^{cl} 的定义得到

$$\begin{bmatrix} P^{\delta^{-1}} (A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda P^\delta) P^{\delta^{-1}} & P^{\delta^{-1}} (P^\delta E \mathbf{w}^0) \\ ((E \mathbf{w}^0)^\top P^\delta) P^{\delta^{-1}} & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (227a)$$

$$\begin{bmatrix} P^{\delta^{-1}} A^{\text{cl}\top} + A^{\text{cl}} P^{\delta^{-1}} + \lambda P^{\delta^{-1}} & E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (227b)$$

，其在第 4.3.2 节相同的坐标变换下，以及状态无关的 $X^\delta = P^{\delta^{-1}}$ 和状态相关的 $Y^\delta(\mathbf{x}) = K^\delta(\mathbf{x}) P^\delta$ ，并利用 P^δ 的对称性，得到以下 LMI：

$$\begin{bmatrix} X^\delta A(\zeta)^\top + Y^\delta(\mathbf{x})^\top B(\zeta)^\top + A(\zeta) X^\delta + B(\zeta) Y^\delta(\mathbf{x}) + \lambda X^\delta & E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (228a)$$

$$\begin{bmatrix} A(\zeta) X^\delta + B(\zeta) Y^\delta(\mathbf{x}) + (A(\zeta) X^\delta + B(\zeta) Y^\delta(\mathbf{x}))^\top + \lambda X^\delta & E \mathbf{w}^0 \\ (E \mathbf{w}^0)^\top & -\lambda \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (228b)$$

。

该附录的目标是推导 LMI，以确保根据 (43c)，使用收紧常数 c° 和增量 Lyapunov 函数 $V^\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ，使障碍物回避约束满足 Lipschitz 连续性。遵循与 [32] 类似的步骤，我们首先推导出一般约束 $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$ 的 Lipschitz 界，即，关于以下形式的 $j \in \mathbb{N}_{[1,n]}$ 的界限，其中 n 是约束的数量：

这些约束相对于状态 $\mathbf{x}$ 和输入 $\mathbf{u}$ 的线性化为

其中 δ 在 (47) 中定义。这给出了以下 Lipschitz 界：

我们可以将 $\|\delta\|_{P^\delta}$ 的表达式改写为

得到

定义 $\tilde{\delta} := P^{\delta \frac{1}{2}} \delta$ 给出了以下不等式：

该方程左侧的上限为

因此，(??) 成立的充分条件是

在以下内容中，我们具体推导了用于障碍规避约束的 LMI。首先注意，障碍规避约束 (3) 已经是线性的，并且不依赖于输入 $\mathbf{u}$ 。因此，我们可以写如下等式：

$$\frac{\partial g^\circ}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial g^\circ}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}} = L^\circ M. \quad (229)$$

将此表达式填入 (??) 中得到如下不等式：

$$\left\| L^\circ M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| \leq c^\circ. \quad (230)$$

如 (3) 中所述，多面体障碍规避约束总是可以标准化，使得 $\|L^\circ\| = 1$ 。因此，我们可以写出

$$\left\| L^\circ M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| \leq \|L^\circ\| \left\| M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| = \left\| M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\|. \quad (231)$$

。因此，以下的蕴含关系成立：

$$\left\| M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| \leq c^\circ I^{n^p} \implies \left\| L^\circ M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| \leq c^\circ. \quad (232)$$

通过计算该蕴含关系的左侧并应用坐标变换 $X^\delta := P^{\delta - 1}$ ，得到

$$\left\| M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\| \leq c^\circ I^{n^p} \quad (233a)$$

$$\left\| M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right\|^2 \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233b)$$

$$\left\| \left(M P^{\delta - \frac{1}{2}} \right)^\top \right\|^2 \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233c)$$

$$\left\| P^{\delta - \frac{1}{2}} M^\top \right\|^2 \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233d)$$

$$\left(P^{\delta - \frac{1}{2}} M^\top \right)^\top \left(P^{\delta - \frac{1}{2}} M \right) \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233e)$$

$$M P^{\delta - \frac{1}{2}} P^{\delta - \frac{1}{2}} M^\top \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233f)$$

$$M P^{\delta - 1} M^\top \leq c^{o2} I^{n^p} \quad (233g)$$

$$c^{o2} I^{n^p} - M P^{\delta - 1} M^\top \succeq 0 \quad (233h)$$

$$c^{o2} I^{n^p} - M P^{\delta - 1} P^\delta P^{\delta - 1} M^\top \succeq 0 \quad (233i)$$

$$c^{o2} I^{n^p} - M X^\delta X^{\delta - 1} X^\delta M^\top \succeq 0. \quad (233j)$$

取该 LMI 的舒尔补可以得到

$$\begin{bmatrix} c^{o2} I^{n^p} & M X^\delta \\ (M X^\delta)^\top & X^\delta \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (234)$$

□

C 终端集合 (164) 不变性的证明

本附录中的证明与附录 ?? 中的证明步骤类似。为了证明终端集 (164) 对于 $\tau \geq 0$ 是不变的，我们需要证明如果在时间 t 的预测时间 T 满足终端集约束，即

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T|t}^*, \mathbf{x}_{t+T}^r)} + s_T + \epsilon \leq \alpha, \quad (235)$$

那么在时间 t 对于 $T + \tau, \tau \geq 0$ 也应该满足终端集约束, 即

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} + s_{T+\tau} + \epsilon \leq \alpha. \quad (236)$$

由于在预测范围此部分没有干扰, 我们知道终端控制律 $\kappa^f(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)$ 确保 $\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)}$ 至少按照 (46) 收缩了 ρ 。给定终端集满足条件 (235), 这给出了以下上界:

$$\sqrt{V^\delta(\mathbf{z}_{T+\tau|t}^*, \mathbf{x}_{t+T+\tau}^r)} \leq e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T - \epsilon). \quad (237)$$

。如果终端集是不变的, 则该方程的右边由 (236) 导出被上界为 $\alpha - s_{T+\tau} - \epsilon$:

$$e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T - \epsilon) \leq \alpha - s_{T+\tau} - \epsilon, \quad (238)$$

, 这对于 $\tau = 0$ 是显然满足的。解决 $\tau > 0$ 的不等式, 类似于 (217), 得出

$$e^{-\rho\tau} (\alpha - s_T - \epsilon) \leq \alpha - s_{T+\tau} - \epsilon \quad (239a)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq -e^{-\rho\tau} s_T + s_{T+\tau} + (1 - e^{-\rho\tau}) \epsilon \quad (239b)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq -e^{-\rho\tau} (1 - e^{-\rho T}) \frac{\bar{w}^0}{\rho} + \left(1 - e^{-\rho(T+\tau)}\right) \frac{\bar{w}^0}{\rho} + (1 - e^{-\rho\tau}) \epsilon \quad (239c)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq \left(1 - e^{-\rho\tau} + e^{-\rho(T+\tau)} + e^{-\rho(T+\tau)}\right) \frac{\bar{w}^0}{\rho} + (1 - e^{-\rho\tau}) \epsilon \quad (239d)$$

$$(1 - e^{-\rho\tau}) \alpha \geq (1 - e^{-\rho\tau}) \frac{\bar{w}^0}{\rho} + (1 - e^{-\rho\tau}) \epsilon \quad (239e)$$

$$\alpha \geq \frac{\bar{w}^0}{\rho} + \epsilon. \quad (239f)$$

。因此, 只要 $\alpha \geq \frac{\bar{w}^0}{\rho} + \epsilon$, 终端集 (164) 是不变的。□

D ϵ -RPI LMI (183) 的证明

本附录的目标是设计一个 LMI, 确保次水平集 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \leq \epsilon^2$ 对于估计状态动态 $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ (由 (177) 给出, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in H$ 在 (144) 中定义, H 在 (145) 中定义) 和受到干扰的动态 $\dot{\mathbf{x}}$ (由 (38) 给出, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^b + \mathbf{w}^0 \in \mathbf{w}^b \oplus \mathcal{W}$ 和 $\mathcal{W}$ 在 (39) 中定义) 之间的误差是 RPI 的。

给定状态无关的 P^δ , $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 由

$$V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) := (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\top P^\delta (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}). \quad (240)$$

给出。为了使 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 的 ϵ 子水平集成为 RPI, 我们希望满足以下属性:

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta \boldsymbol{\epsilon} \geq \epsilon^2, \quad \forall \mathbf{w}^0 \in \mathcal{W} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H, \quad (241)$$

, 其中 $\boldsymbol{\epsilon}$ 在 (157) 中定义。使用以下额外的简写符号 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ 和 A^{cl} :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}, \\ &= f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w} - (f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + L(F\boldsymbol{\eta} + C(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}))) \\ &= f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^0 - L(F\boldsymbol{\eta} + C\boldsymbol{\epsilon}), \end{aligned} \quad (242)$$

$$A := A(\gamma^x, \gamma^u), \quad (243)$$

我们可以对 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 的时间导数进行上界估计, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) &= (\dot{\boldsymbol{\epsilon}})^\top P^\delta \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ &= 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (244a)$$

$$= 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^0 - L(F\boldsymbol{\eta} + C\boldsymbol{\epsilon})) \quad (244b)$$

$$\begin{aligned} &= 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (f(\mathbf{x}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v}))) - 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta LC\boldsymbol{\epsilon} \\ &\quad + 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \quad (244c)$$

$$\stackrel{(a)}{\leq} 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta A\boldsymbol{\epsilon} - 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta LC\boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \quad (244d)$$

$$= 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (A - LC)\boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \quad (244e)$$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{\epsilon}^\top \left((A - LC)^\top P^\delta + P^\delta (A - LC) \right) \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^\top P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \\ &\quad + (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta \boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned} \quad (244f)$$

，其中 (a) 是通过知道存在一个 $s \in [0, 1]$ 得到的，使得此表达式通过 MVT 成立。
设置期望的上界为 (241)，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) &\leq \epsilon^\top \left((A - LC)^\top P^\delta + P^\delta (A - LC) \right) \epsilon + \epsilon^\top P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) + (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta \epsilon \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (245)$$

或者，也可以是

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} (A - LC)^\top P^\delta + P^\delta (A - LC) & P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \\ (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (246)$$

。只需对 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H)$ 强制执行此不等式，因为 $\mathcal{W}$ 和 H 是凸多面体集合。

遵循与附录 B 中推导类似的 S-程序，得到以下 LMI：使用乘子 $\lambda^\epsilon \geq 0$ ，对于 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H)$ 的

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^\top P^\delta + P^\delta (A - LC) + \lambda^\epsilon P^\delta & P^\delta (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}) \\ (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta & -\lambda^\epsilon \epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (247)$$

。

从这里开始，按照附录 B 中所示的相同步骤，可以得到以下的 ϵ -RPI LMI：

$$\begin{bmatrix} X^\delta (A(\zeta) - LC)^\top + (A(\zeta) - LC) X^\delta + \lambda^\epsilon X^\delta & E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta} \\ (E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta})^\top & -\lambda^\epsilon \epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (248)$$

，其中包括 $\lambda^\epsilon \geq 0$ ，并针对 $\mathbf{w}^0 \in \text{vert}(\mathcal{W})$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \text{vert}(H)$ 。

注意，这个 LMI 与附录 B 中推导的 RPI LMI 相似，但在左上角的块中增加了与 L 成比例的项，在右上角和左下角的块中用 $E\mathbf{w}^0 - LF\boldsymbol{\eta}$ 代替了 $E\mathbf{w}^0$ 。□

E δ -RPI LMI (186) 的证明

本附录的目标是推导出 LMI，以确保子级集 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq \delta^2$ 对于由 (177) 中定义的估计状态动态 $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ 和 (144) 中定义的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ 及 $\boldsymbol{\eta} \in H$ ，以及在 (145) 中定义的 H 与观测器误差 ϵ （在 (157) 中定义，满足 $\epsilon^\top P^\delta \epsilon \leq \epsilon^2$ ）之间的误差是 RPI，正如 LMI (183) 所强制的。

为了使 δ 的 $V^\delta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ 子水平集成为 RPI，我们希望以下性质成立：

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq 0, \quad \forall \delta^\top P^\delta \delta \geq \delta^2, \quad \forall \epsilon^\top P^\delta \epsilon \leq \epsilon^2, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H, \quad (249)$$

，其中 δ 和 ϵ 分别在 (156) 和 (157) 中定义。使用以下 A^{cl} 的简写符号：

$$A^{\text{cl}} := A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(\mathbf{x}), \quad (250)$$

我们可以对 $V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z})$ 的时间导数作上界

$$\frac{d}{dt} V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) = \dot{\delta}^\top P^\delta \delta + \delta^\top P^\delta \dot{\delta} \quad (251a)$$

$$= 2\delta^\top P^\delta \dot{\delta} \quad (251b)$$

$$= 2\delta^\top P^\delta (f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) + E\mathbf{w}^b + LF\boldsymbol{\eta} + LC\epsilon - f(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - E\mathbf{w}^b) \quad (251c)$$

$$= 2\delta^\top P^\delta (f(\hat{\mathbf{x}}, \kappa(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})) - f(\mathbf{z}, \mathbf{v})) + 2\delta^\top P^\delta (LF\boldsymbol{\eta} + LC\epsilon) \quad (251d)$$

$$\stackrel{(a)}{\leq} 2\delta^\top P^\delta A^{\text{cl}} \delta + 2\delta^\top P^\delta (LF\boldsymbol{\eta} + LC\epsilon) \quad (251e)$$

$$= \delta^\top A^{\text{cl}\top} P^\delta \delta + \delta^\top P^\delta A^{\text{cl}} \delta + (LF\boldsymbol{\eta} + LC\epsilon)^\top P^\delta \delta + \delta^\top P^\delta (LF\boldsymbol{\eta} + LC\epsilon) \quad (251f)$$

$$\begin{aligned} &= \delta^\top \left(A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} \right) \delta + (LC\epsilon)^\top P^\delta \delta + \delta^\top P^\delta LC\epsilon \\ &\quad + (LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta \delta + \delta^\top P^\delta LF\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (251g)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta LC & P^\delta LF\boldsymbol{\eta} \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n_x} & \mathbf{0} \\ (LF\boldsymbol{\eta})^\top P^\delta & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (251h)$$

其中 (a) 是通过知道存在一个 $s \in [0, 1]$ ，使得这个表达式通过 MVT 成立而得到的。

从 (249) 设定期望的上限得出

$$\frac{d}{dt}V^\delta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}) \leq \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (252)$$

。由于 H 是一个凸多面体集合，因此只需对 $\eta \in H$ 强制执行此不等式即可。

应用 S-程序以确保不等式 $\forall \delta^\top P^\delta \delta \geq \delta^2$ 对于

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (253a)$$

$$F_1 := \begin{bmatrix} -P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix}, \quad (253b)$$

$$F_2 := \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (253c)$$

成立，得到以下 LMI:

$$\lambda^\delta \begin{bmatrix} -P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (254a)$$

$$\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} - \lambda^\delta \begin{bmatrix} -P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (254b)$$

$$\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & -\lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (254c)$$

和 $\lambda^\delta \geq 0$ 。

我们希望这个 LMI 成立 $\forall \epsilon^\top P^\delta \epsilon \leq \epsilon^2$ 。再次应用 S-程序，这次使用

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} \delta \\ \epsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (255a)$$

$$F_1 := \begin{bmatrix} 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon^2 \end{bmatrix}, \quad (255b)$$

$$F_2 := \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0 & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & -\lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix}, \quad (255c)$$

得到以下 LMI:

$$\lambda^{\delta, \epsilon} \begin{bmatrix} 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & -\lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (256a)$$

$$\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & -\lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} - \lambda^{\delta, \epsilon} \begin{bmatrix} 0^{n^\times} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\epsilon^2 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (256b)$$

$$\begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & -\lambda^{\delta, \epsilon} P^\delta & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (256c)$$

与 $\lambda^\delta, \lambda^{\delta, \epsilon} \geq 0$ 。通过 $\begin{bmatrix} P^{\delta-1} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ 进行前后乘得出

$$\begin{bmatrix} P^{\delta-1} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\text{cl}\top} P^\delta + P^\delta A^{\text{cl}} + \lambda^\delta P^\delta & P^\delta LC & P^\delta LF\eta \\ (LC)^\top P^\delta & -\lambda^{\delta, \epsilon} P^\delta & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{\delta-1} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (257a)$$

$$\begin{bmatrix} P^{\delta-1} A^{\text{cl}\top} P^\delta + A^{\text{cl}} + \lambda^\delta & LC & LF\eta \\ P^{\delta-1} (LC)^\top & -\lambda^{\delta, \epsilon} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top P^\delta & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{\delta-1} & 0^{n^\times} & \mathbf{0} \\ 0^{n^\times} & P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (257b)$$

$$\begin{bmatrix} P^{\delta-1} A^{\text{cl}\top} + A^{\text{cl}} P^{\delta-1} + \lambda^\delta P^{\delta-1} & LCP^{\delta-1} & LF\eta \\ P^{\delta-1} (LC)^\top & -\lambda^{\delta, \epsilon} P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (257c)$$

。填入 A^{cl} 的定义得到

$$\begin{bmatrix} P^{\delta-1} (A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(x))^\top + (A(\zeta) + B(\zeta)K^\delta(x)) P^{\delta-1} + \lambda^\delta P^{\delta-1} & LCP^{\delta-1} & LF\eta \\ P^{\delta-1} (LC)^\top & -\lambda^{\delta, \epsilon} P^{\delta-1} & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (258)$$

，在坐标变换 $X^\delta := P^{\delta-1}, Y^\delta(x) := K^\delta(x)X^\delta$ 下得到以下 LMI:

$$\begin{bmatrix} A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(x) + (A(\zeta)X^\delta + B(\zeta)Y^\delta(x))^\top + \lambda^\delta X^\delta & LCX^\delta & LF\eta \\ (LCX^\delta)^\top & -\lambda^{\delta, \epsilon} X^\delta & \mathbf{0} \\ (LF\eta)^\top & \mathbf{0} & \lambda^{\delta, \epsilon} \epsilon^2 - \lambda^\delta \delta^2 \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (259)$$

□

F 范数线性矩阵不等式 (194d) 的证明

本附录的目的是展示 (195) 是由 LMI (194d) 强制执行的。

将 (195) 平方得到

$$\left\| P^{\delta \frac{1}{2}} LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \right\|^2 \leq l^2. \quad (260)$$

将这个不等式化为矩阵形式得到

$$\left\| P^{\delta \frac{1}{2}} LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \right\|^2 = \left(P^{\delta \frac{1}{2}} LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \right)^\top \left(P^{\delta \frac{1}{2}} LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \right) \quad (261a)$$

$$\stackrel{(a)}{=} P^{\delta - \frac{1}{2}} (LC)^\top P^{\delta \frac{1}{2}} P^{\delta \frac{1}{2}} LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \quad (261b)$$

$$= P^{\delta - \frac{1}{2}} (LC)^\top P^\delta LCP^{\delta - \frac{1}{2}} \quad (261c)$$

$$\leq l^2 I^{n^\times}, \quad (261d)$$

，其中 (a) 由 P^δ 的对称性保持。左右两边同时乘以 $P^{\delta \frac{1}{2}}$ 得到

$$(LC)^\top P^\delta LC \preceq l^2 P^\delta, \quad (262)$$

或者，相当于

$$l^2 P^\delta - (LC)^\top P^\delta P^{\delta-1} P^\delta LC \succeq 0. \quad (263)$$

通过利用 $P^\delta \succeq 0$ 对这个 LMI 进行 Schur 补，可以得到

$$\begin{bmatrix} P^\delta & P^\delta LC \\ (P^\delta LC)^\top & l^2 P^\delta \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (264)$$

，这相当于 LMI (194d)。

□

References

- [1] A. Bemporad and M. Morari, “Robust model predictive control: A survey,” in *Robustness in identification and control* . Springer, 2007, pp. 207–226.
- [2] B. Kouvaritakis and M. Cannon, “Model predictive control,” Switzerland: Springer International Publishing , vol. 38, pp. 13–56, 2016.
- [3] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, and M. Diehl, *Model predictive control: theory, computation, and design* . Nob Hill Publishing Madison, WI, 2017, vol. 2.
- [4] F. Allgower, R. Findeisen, Z. K. Nagy et al. , “Nonlinear model predictive control: From theory to application,” *Journal-Chinese Institute Of Chemical Engineers* , vol. 35, no. 3, pp. 299–316, 2004.
- [5] D. Q. Mayne, “Model predictive control: Recent developments and future promise,” *Automatica* , vol. 50, no. 12, pp. 2967–2986, 2014.
- [6] L. Grüne, J. Pannek, L. Grüne, and J. Pannek, *Nonlinear model predictive control* . Springer, 2017.
- [7] M. B. Saltık, L. Özkan, J. H. Ludlage, S. Weiland, and P. M. Van den Hof, “An outlook on robust model predictive control algorithms: Reflections on performance and computational aspects,” *Journal of Process Control* , vol. 61, pp. 77–102, 2018.
- [8] T. P. Nascimento, C. E. Dórea, and L. M. G. Gonçalves, “Nonholonomic mobile robots’ trajectory tracking model predictive control: a survey,” *Robotica* , vol. 36, no. 5, pp. 676–696, 2018.
- [9] H. Nguyen, M. Kamel, K. Alexis, and R. Siegwart, “Model predictive control for micro aerial vehicles: A survey,” in *2021 European Control Conference (ECC)* . IEEE, 2021, pp. 1556–1563.
- [10] Y. Shi and K. Zhang, “Advanced model predictive control framework for autonomous intelligent mechatronic systems: A tutorial overview and perspectives,” *Annual Reviews in Control* , vol. 52, pp. 170–196, 2021.
- [11] H. Wei and Y. Shi, “Mpc-based motion planning and control enables smarter and safer autonomous marine vehicles: Perspectives and a tutorial survey,” *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* , vol. 10, no. 1, pp. 8–24, 2022.
- [12] T. Faulwasser, “Optimization-based solutions to constrained trajectory-tracking and path-following problems,” PhD thesis, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Germany, October 2012.
- [13] J. Köhler, M. A. Müller, and F. Allgöwer, “A nonlinear model predictive control framework using reference generic terminal ingredients,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , 2020, extended preprint on arXiv: arXiv:1909.12765v2.
- [14] D. Benders, J. Köhler, T. Niesten, R. Babuška, J. Alonso-Mora, and L. Ferranti, “Embedded hierarchical mpc for autonomous navigation,” *IEEE Transactions on Robotics* , vol. 41, pp. 3556–3574, 2025.
- [15] J. Köhler, M. A. Müller, and F. Allgöwer, “A novel constraint tightening approach for nonlinear robust model predictive control,” in *2018 Annual American control conference (ACC)* . IEEE, 2018, pp. 728–734.
- [16] R. Soloperto, J. Köhler, F. Allgöwer, and M. A. Müller, “Collision avoidance for uncertain nonlinear systems with moving obstacles using robust model predictive control,” in *2019 18th European Control Conference (ECC)* . IEEE, 2019, pp. 811–817.
- [17] J. Köhler, R. Soloperto, M. A. Müller, and F. Allgöwer, “A computationally efficient robust model predictive control framework for uncertain nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 66, no. 2, pp. 794–801, 2020, extended preprint on arXiv: arXiv:1910.12081v2.
- [18] P. Zhao, A. Lakshmanan, K. Ackerman, A. Gahlawat, M. Pavone, and N. Hovakimyan, “Tube-certified trajectory tracking for nonlinear systems with robust control contraction metrics,” *IEEE Robotics and Automation Letters* , vol. 7, no. 2, pp. 5528–5535, 2022.
- [19] A. Sasfi, M. N. Zeilinger, and J. Köhler, “Robust adaptive mpc using control contraction metrics,” *Automatica* , vol. 155, p. 111169, 2023.

- [20] M. Kögel and R. Findeisen, “Robust output feedback mpc for uncertain linear systems with reduced conservatism,” *IFAC-PapersOnLine* , vol. 50, no. 1, pp. 10 685–10 690, 2017.
- [21] J. Köhler, F. Allgöwer, and M. A. Müller, “A simple framework for nonlinear robust output-feedback mpc,” in *2019 18th European control conference (ECC)* . IEEE, 2019, pp. 793–798.
- [22] J. Köhler, M. A. Müller, and F. Allgöwer, “Robust output feedback model predictive control using online estimation bounds,” *arXiv preprint arXiv:2105.03427* , 2021.
- [23] G. Chou, N. Ozay, and D. Berenson, “Safe output feedback motion planning from images via learned perception modules and contraction theory,” in *International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics* . Springer, 2022, pp. 349–367.
- [24] S. Brown, M. Khajenejad, A. Suresh, and S. Martínez, “Robust output-feedback mpc for nonlinear systems with applications to robotic exploration,” *IEEE Control Systems Letters* , 2025.
- [25] S. Liu, M. Watterson, K. Mohta, K. Sun, S. Bhattacharya, C. J. Taylor, and V. Kumar, “Planning dynamically feasible trajectories for quadrotors using safe flight corridors in 3-d complex environments,” *IEEE Robotics and Automation Letters* , vol. 2, no. 3, pp. 1688–1695, 2017.
- [26] J. Arrizabalaga, Z. Manchester, and M. Ryll, “Differentiable collision-free parametric corridors,” in *2024 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* . IEEE, 2024, pp. 1839–1846.
- [27] O. de Groot, B. Brito, L. Ferranti, D. Gavrila, and J. Alonso-Mora, “Scenario-based trajectory optimization in uncertain dynamic environments,” *IEEE Robotics and Automation Letters* , vol. 6, no. 3, pp. 5389–5396, 2021.
- [28] P. O. Scokaert, D. Q. Mayne, and J. B. Rawlings, “Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability),” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 44, no. 3, pp. 648–654, 1999.
- [29] I. Barbalat et al. , “Systemes d’ équations différentielles d’ oscillations non linéaires,” *Rev. Math. Pures Appl* , vol. 4, no. 2, pp. 267–270, 1959.
- [30] D. Angeli, “A lyapunov approach to incremental stability properties,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 47, no. 3, pp. 410–421, 2002.
- [31] J. Köhler, M. A. Müller, and F. Allgöwer, “Nonlinear reference tracking: An economic model predictive control perspective,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 64, no. 1, pp. 254–269, 2018.
- [32] J. Nubert, “Learning-based approximate model predictive control with guarantees,” *Master’s thesis, ETH Zürich Zürich*, 2019.
- [33] J. S. Probst, “Data-driven optimal control for safe quadrotor navigation in windy environments,” *Master’s thesis, Delft University of Technology*, 2023.
- [34] S. Carena, “Wind estimation using gaussian process regression for safe drone control,” *Master’s thesis, Politecnico di Torino*, 2024.
- [35] M. Dubied, A. Lahr, M. N. Zeilinger, and J. Köhler, “A robust and adaptive mpc formulation for gaussian process models,” *arXiv preprint arXiv:2507.02098* , 2025.
- [36] S. Yu, M. Reble, H. Chen, and F. Allgöwer, “Inherent robustness properties of quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control,” *Automatica* , vol. 50, no. 9, pp. 2269–2280, 2014.
- [37] D. Q. Mayne, E. C. Kerrigan, E. Van Wyk, and P. Falugi, “Tube-based robust nonlinear model predictive control,” *International journal of robust and nonlinear control* , vol. 21, no. 11, pp. 1341–1353, 2011.
- [38] F. Bayer, M. Bürger, and F. Allgöwer, “Discrete-time incremental iss: A framework for robust nmpp,” in *2013 European control conference (ECC)* . IEEE, 2013, pp. 2068–2073.
- [39] S. Singh, B. Landry, A. Majumdar, J.-J. Slotine, and M. Pavone, “Robust feedback motion planning via contraction theory,” *The International Journal of Robotics Research* , vol. 42, no. 9, pp. 655–688, 2023.

- [40] J. Köhler, M. N. Zeilinger, A. Carron, and L. Hewing, “Advanced model predictive control - nonlinear robust mpc - part 1 [lecture notes]. intelligent control systems, eth zürich.” 2024.
- [41] J. Nubert, J. Köhler, V. Berenz, F. Allgöwer, and S. Trimpe, “Safe and fast tracking on a robot manipulator: Robust mpc and neural network control,” *IEEE Robotics and Automation Letters* , vol. 5, no. 2, pp. 3050–3057, 2020.
- [42] D. L. Marruedo, T. Alamo, and E. F. Camacho, “Input-to-state stable mpc for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties,” in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002. , vol. 4. IEEE, 2002, pp. 4619–4624.
- [43] M. E. Villanueva, R. Quirynen, M. Diehl, B. Chachuat, and B. Houska, “Robust mpc via min–max differential inequalities,” *Automatica* , vol. 77, pp. 311–321, 2017.
- [44] G. Pin, D. M. Raimondo, L. Magni, and T. Parisini, “Robust model predictive control of nonlinear systems with bounded and state-dependent uncertainties,” *IEEE Transactions on automatic control* , vol. 54, no. 7, pp. 1681–1687, 2009.
- [45] I. R. Manchester and J.-J. E. Slotine, “Control contraction metrics: Convex and intrinsic criteria for nonlinear feedback design,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 62, no. 6, pp. 3046–3053, 2017.
- [46] W. Lohmiller and J.-J. E. Slotine, “On contraction analysis for non-linear systems,” *Automatica* , vol. 34, no. 6, pp. 683–696, 1998.
- [47] J. D. Schiller, S. Muntwiler, J. Köhler, M. N. Zeilinger, and M. A. Müller, “A lyapunov function for robust stability of moving horizon estimation,” *IEEE Transactions on Automatic Control* , vol. 68, no. 12, pp. 7466–7481, 2023.
- [48] S. Boyd, “Convex optimization,” Cambridge UP , 2004.