模块化机器人和地标定位使用相对方位测量

Behzad Zamani and Jochen Trumpf and Chris Manzie

***Abstract*— 在本文中，我们提出了一种模块化非线性最小二乘滤波方法，用于由独立子系统组成的系统。每个子系统的状态和误差协方差估计都是独立更新的，即使一个相对测量同时依赖于多个子系统的状态。我们将协方差交集（CI）算法整合为我们解决方案的一部分，以防止当子系统相互共享估计时出现信息重复计算。基于最小二乘估计的 CI 算法的另一种推导使这种整合成为可能。我们特别将所提出的方法应用于机器人-地标定位问题。在这个问题中，相对于移动机器人的 SE(2) 位姿测量的固定地标位置的方位角的噪声测量，将机器人的位姿和地标位置的估计问题联系在一起。在一个随机模拟研究中，我们将提出的模块化方法与整体联合状态滤波器进行基准测试，以阐明它们各自的权衡。在这项研究中，我们还包括了所提方法的变体，其通过减少通信和带宽需求实现性能的优雅退化。**

许多机器人应用由多个独立的子系统组成，每个子系统接收和处理测量数据，以指导整个系统的决策。同步定位与地图构建（SLAM）、目标跟踪、协作定位、自动驾驶汽车以及增强/虚拟现实头戴设备都是具有这种特征的例子。在理想的情况下，这些子系统的状态将被连接成一个单一的联合状态，并为整个系统设计一个状态估计器。然而在实际中，复杂系统的开发需要多次设计迭代，并且开发模块化的方法来测量和融合信号有其动机。模块化有助于管理设计的复杂度（例如状态向量表示的大小和误差协方差矩阵）、关注点分离、调试、互操作性和变更管理。

在本文中，我们提出了一种模块化非线性最小二乘滤波方法，用于处理由独立子系统组成的系统。我们独立更新每个子系统的状态和误差协方差估计，即使某个相关测量同时依赖于多个子系统的状态。在这种设置下，子系统之间交换的信息不是统计独立的，也不包含（跟踪的）交叉相关 [1], [2] 。卡尔曼滤波 [3] 基础的融合算法或类似方法不适用，因为它们要么要求交换的信息是统计上同分布和独立的，要么要求交叉协方差信息可用或被跟踪。我们将协方差交叉算法（CI） [4] 作为我们解决方案的一部分，以防止当描述子系统如何共享估计的信息流图包含回路时的信息重复计数。我们提供了一种基于最小二乘滤波的 CI 算法的替代推导，使这种集成成为可能。将讨论所提出模块化方法的三种变体，它们在通信、计算或两者上提供了较低的要求，同时与主要结果相比实现了性能的适应性减弱。

我们将提出的方法特别应用于使用相对方位测量进行机器人-地标定位的问题。在这个问题中，相对于移动机器人的 SE(2) 位姿测量到静止地标位置的方位角的噪声测量，将机器人的位姿估计问题与地标位置的估计问题联系在一起。我们推导出非线性状态和误差协方差估计算法，以模块化且数值上稳健的方式解决这个问题。在一个随机化的模拟研究中，我们将提出的方法相互对比，同时也与一个非模块化的联合状态滤波器进行对比，以阐明它们各自的权衡。

与我们的模块化估计方法类似的思想可以在 [5]–[8] 及其引述的相关论文中找到。在 [5] 中，提出了一个基于置信区间（CI）的分布式机器人地标更新方法，用于基于扩展卡尔曼滤波（EKF）表述的 SLAM（同步定位与地图构建）问题。在 [6], [8] 中，探讨了基于 CI 的合作自定位算法，其中每个子系统估计整个网络的联合状态。方法 [7] 与我们的方法最为接近，尽管它专注于基于 EKF-CI 的多机器人合作定位算法。与这些方法相比，本文提供了一种完全模块化的非线性最小二乘滤波方法，用于解决基于方位的机器人地标定位高度非线性问题。

本文的其余部分组织如下。第 **??** 节介绍了模块化状态估计问题。在第 **??** 节中提出了一种解决此问题的非线性最小二乘方法。第 **??** 节将所提模块化最小二乘结果具体化为使用相对方位测量和机器人特定测量的机器人地标定位问题。第 I 节提供了一项随机模拟研究，将所提出的模块化方法与非模块化经典方法进行基准对比。第 II 节总结了本文内容。

考虑一个具有两个状态 $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ 的系统。假设存在两个独立的先验估计 $(\hat{x}_i(0), P_i(0))$ 和 $i = 1, 2$ ，其中

$$\begin{aligned} &\hat{x}_i(0) = \mathcal{E}[x_i(0)], \\ &P_i(0) = \mathcal{E}[\big(x_i(0) - \hat{x}_i(0)\big)\big(x_i(0) - \hat{x}_i(0)\big)^\top], \qquad (1) \\ &P_{1,2}(0) = \mathcal{E}[\big(x_1(0) - \hat{x}_1(0)\big)\big(x_2(0) - \hat{x}_2(0)\big)^\top] = 0_{n_1 \times n_2} \end{aligned}$$

和 $\mathcal{E}[\cdot]$ 表示期望值。进一步假设一组测量 $(z_i,\ W_i)$ 和 $(z_{1,2}, W_{1,2})$ 可以定期获取，分别提供关于 x_i 或 x_1 和 x_2 的信息。在这里，我们用 $z_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ 表示在维度为 p_i 的 x_i 上的测量信号，并用 $W_i \in \mathbb{R}^{p_i \times p_i} > 0$ 表示 z_i 的正定估计测量误差协方差。同样地，$z_{1,2} \in \mathbb{R}^{p_{1,2}}$ 是关于两个状态 x_1 和 x_2 的测量信号，维度为 $p_{1,2}$ ，估计测量误差协方差为 $W_{1,2} \in \mathbb{R}^{p_{1,2} \times p_{1,2}} > 0.$ 。

信号处理中的标准方法是使用这些测量来更新联合状态和误差协方差估计 ($\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $P \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$) 。后者将涉及个别误差协方差 P_1 和 P_2 以及交叉协方差 $P_{1,2}$ 。如果所选的估计算法随机耦合了估计值 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$ ，则交叉协方差将不再为零。本文旨在以模块化的方式递归地更新子系统估计 $(\hat{x}_i, P_i)$ 。图 **??** 展示了这种方法的模块化框图。每个子系统接收包含其自身状态信息的任何测量。为了处理依赖于两个子系统状态的相对测量，子系统必须互相共享其状态和误差协方差估计。然而，不会跟踪交叉协方差 $P_{1,2}$ ，以便子系统可以独立解耦和设计。问题在于如何在不跟踪信息的交叉相关（即交叉协方差 $P_{1,2}$ ）并导致信息重复计算问题的情况下执行模块化解耦的状态估计。

B. Zamani and C. Manzie are with the Department of Electrical and Electronic Engineering, University of Melbourne, Melbourne, Australia behzad.zamani@unimelb.edu.au, manziec@unimelb.edu.au

J. Trumpf is with the School of Engineering, The Australian National University, Canberra, Australia Jochen.Trumpf@anu.edu.au

请注意，与联合状态估计相比，模块化方法必然会损失一些最优性和/或准确性。然而，对于大规模复杂工厂来说，方法的模块化可能使其成为一个有吸引力的选择。

在本节中，我们提出了一种方法，用于基于一个相对测量（$z_{1,2}$ ）更新子模块状态（x_1 ）的估计，该测量还取决于另一个子模块的状态（x_2 ）。测量仅依赖于自身状态的联合系统状态估计或子系统状态估计可以用通常的方法进行，例如在非线性问题的情况下使用扩展卡尔曼滤波器（EKF） [9] 。但这种方法对于我们的问题不起作用，因为它需要跟踪交叉协方差。

令 $(\hat{x}_1, P_1)$ 和 $(\hat{x}_2, P_2)$ 分别表示对 x_1 和 x_2 的估计及其误差协方差。以下二次代价衡量这些估计的不确定性，

$$\frac{1}{2}\|x_1 - \hat{x}_1\|^2_{P_1^{-1}},\ \frac{1}{2}\|x_2 - \hat{x}_2\|^2_{P_2^{-1}}, \tag{2}$$

其中 $\|x\|^2_{P^{-1}} \triangleq x^\top P^{-1} x$ 。令 $(z_{1,2}, W_{1,2})$ 表示一个非线性依赖于 x_1 和 x_2 的测量及其估计的测量误差协方差。用 $h_{1,2} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{p_{1,2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{p_{1,2}}$ 表示一个非线性误差映射，即在测量精确时取值为零的映射。然后，以下二次代价以零为中心，衡量 $z_{1,2}$ 关于 x_1 和 x_2 的不确定性，

$$\frac{1}{2}\|h_{1,2}(x_1, x_2, z_{1,2})\|^2_{W_{1,2}^{-1}}. \tag{3}$$

。这个通用设置专门用于有用且熟悉的情况，如线性相对测量 $h^l_{1,2}(x_1, x_2, z_{1,2}) = z_{1,2} - (x_1 - x_2)$ ，或第 **??** 节中考虑的非线性相对测量。更新 x_1 估计的任务由通过最小化代价泛函融合先验估计和相对测量信息组成。在第一步中，我们将最小化关于 x_2 的 x_2 的先验估计和 $z_{1,2}$ 的相对测量的不确定性的综合度量。在第二步中，我们将融合 x_1 的先验估计 $\hat{x}_1$ 。考虑捕捉 x_2 信息总体不确定性的最小二乘代价，

$$\begin{aligned} J_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}&\|h_{1,2}(x_1, x_2, z_{1,2})\|^2_{W_{1,2}^{-1}} \\ &+ \frac{1}{2}\|x_2 - \hat{x}_2\|^2_{P_2^{-1}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Lemma 1 (Nonlinear Parallel Sum): 设 $H_i \triangleq \nabla_{x_i} h_{1,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, z_{1,2})$ ，$i = 1, 2$ 。给定先验估计 $(\hat{x}_2, P_2)$ 和测量值 $(z_{1,2}, W_{1,2})$ ，整体不确定性成本 (4) 关于 x_1 的最优值，达到二阶近似误差，由下式给出

$$J^*_{1,2}(x_1) = \frac{1}{2}\|h_{1,2}(x_1, \hat{x}_2, z_{1,2})\|^2_{\tilde{W}_1^{-1}}, \tag{5}$$

其中 $\tilde{W}_1 \triangleq W_{1,2} + H_2 P_2 H_2^\top$ 。

Proof: 令 $x_2^* \triangleq \underset{x_2}{\operatorname{argmin}}\ J_{1,2}(x_1, x_2)$ 。关于 x_2 的一阶最小化条件是

$$\begin{aligned} (\nabla_{x_2} h_{1,2}(x_1, x_2^*, z_{1,2}))^\top &W_{1,2}^{-1} h_{1,2}(x_1, x_2^*, z_{1,2}) \\ &+ P_2^{-1}(x_2^* - \hat{x}_2) = 0. \end{aligned}$$

。通过对 x_2 在 $\hat{x}_2$ 附近进行泰勒展开并在 $x_2 = x_2^*$ 处进行评估，我们得到 $h_{1,2}(x_1, x_2^*, z_{1,2}) = h_{1,2}(x_1, \hat{x}_2, z_{1,2}) + H_2(x_2^* - \hat{x}_2)$ 。然后，由于 $H_2^\top W_{1,2}^{-1} H_2 + P_2^{-1}$ 是可逆的，

$$x_2^* = \hat{x}_2 - \left(H_2^\top W_{1,2}^{-1} H_2 + P_2^{-1}\right)^{-1} H_2^\top W_{1,2}^{-1} h_{1,2}(x_1, \hat{x}_2, z_{1,2}).$$

。将 x_2^* 代入 (4) 并应用矩阵逆引理，完成证明。 ■

需要注意的是，相对测量 $z_{1,2}$ 中包含的关于 x_2 的信息独立于 x_2 的先验估计 $\hat{x}_2$ 。这是因为该信息仅依赖于产生 $z_{1,2}$ 的特定测量设备固有的真信号 x_1 和 x_2 以及测量误差。这解释了为什么我们能够以标准的最小二乘滤波方式进行融合步骤（引理 1 ）。

在第二步中情况不再相同，其目标是将关于 x_1 和 $(\hat{x}_1, P_1)$ 的先验信息与函数 $J^*_{1,2}(x_1)$ 中编码的信息融合。这是因为 $J^*_{1,2}(x_1)$ 依赖于 $(\hat{x}_2, P_2)$ ，而 $(\hat{x}_2, P_2)$ 可能是在先前计算轮次中基于 $(\hat{x}_1, P_1)$ 本身产生的。那么以标准最小二乘滤波方式进行的融合步骤可能会导致先验信息的重复计算。这一现象是众所周知的，并引发了关于在缺乏交叉协方差信息情况下安全融合相关信息的广泛研究，例如参见 [4], [10] 。协方差交集（CI）算法 [4] 为该问题提供了最佳的安全解决方案 [11] 。设 $0 \le \alpha \le 1$ ，并考虑对 x 的两个可能相关的估计，即 $(\hat{x}, P)$ 和 $(\hat{x}', P')$ 。然后 CI 融合算法得到

$$\begin{aligned} x^+ &= P^+\left(\alpha^* P^{-1}\hat{x} + (1-\alpha^*)P'^{-1}\hat{x}'\right) \\ &= \hat{x} - (1-\alpha^*)P^+ P'^{-1}(\hat{x} - \hat{x}'), \\ P^+ &= \left(\alpha^* P^{-1} + (1-\alpha^*)P'^{-1}\right)^{-1}, \\ \alpha^* &= \underset{0\le\alpha\le1}{\operatorname{argmin}} \det\left(\alpha P^{-1} + (1-\alpha)P'^{-1}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

。注意，上述针对 x^+ 的第二个公式并不标准，它明确说明了如何基于一个新的、可能相关的估计 $\hat{x}'$ 更新先验估计 $\hat{x}$ 。

Lemma 2 (Least Squares CI): CI 算法的第一部分 (6) 是凸组合最小二乘代价函数的最小化器

$$J(x) = \frac{\alpha^*}{2}\|x - \hat{x}\|^2_{P^{-1}} + \frac{(1-\alpha^*)}{2}\|x - \hat{x}'\|^2_{P'^{-1}}. \tag{7}$$

Proof: 直接计算得出。 ■

现在我们应用引理 2 来融合关于 x_1 的信息。

1) : 模块化融合 设 $(\hat{x}_1, P_1)$ 和 $(\hat{x}_2, P_2)$ 分别表示对 x_1 和 x_2 的两个可能相关的估计。设成本 (3) 表示对相对测量 $(z_{1,2}, W_{1,2})$ 的独立不确定性，其中包含关于 x_1 和 x_2 的信息。记住 $H_i = \nabla_{x_i} h_{1,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, z_{1,2})$ 、$i = 1, 2$ 和 $\tilde{W}_1 = W_{1,2} + H_2 P_2 H_2^\top$ 并表示 $\tilde{W}_2 \triangleq W_{1,2} + H_1 P_1 H_1^\top$ 。那么，下面的算法

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^+ &= \hat{x}_1 - (1-\alpha_1^*)P_1^+ H_1^\top \tilde{W}_1^{-1} h_{1,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, z_{1,2}), \\ P_1^+ &= \left(\alpha_1^* P_1^{-1} + (1-\alpha_1^*)H_1^\top \tilde{W}_1^{-1} H_1\right)^{-1}, \\ \alpha_1^* &= \underset{0\le\alpha\le}{\operatorname{argmin}} \det\left(\alpha P_1^{-1} + (1-\alpha)H_1^\top \tilde{W}_1^{-1} H_1\right)^{-1}, \\ \hat{x}_2^+ &= \hat{x}_2 - (1-\alpha_2^*)P_2^+ H_2^\top \tilde{W}_2^{-1} h_{1,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, z_{1,2}), \\ P_2^+ &= \left(\alpha_2^* P_2^{-1} + (1-\alpha_2^*)H_2^\top \tilde{W}_2^{-1} H_2\right)^{-1}, \\ \alpha_2^* &= \underset{0\le\alpha\le}{\operatorname{argmin}} \det\left(\alpha P_2^{-1} + (1-\alpha)H_2^\top \tilde{W}_2^{-1} H_2\right)^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

为图 **??** 中的子系统提供了一个模块化融合估计。注意，此算法继承了 CI [4] 的一致性属性。

现在让我们考虑机器人-地标定位问题，并应用所提出的模块化融合算法 (8) 。表 **??** 包含了第 **??** 节中相关参数与我们将在这里逐步引入的那些参数之间的映射。假设

有一个固定地标和一个配备有方位测量传感器的移动机器人。机器人的任务是精确地在全局参考系中定位地标。为此，移动机器人旨在对其自身的位姿 $X_r \in SE(2)$ 进行估计，其中包括其相对于全局参考系的态度 $R_r \in SO(2)$ 和位置 $p_r \in \mathbb{R}^2$ 的估计，以及地标位置 $p_l \in \mathbb{R}^2$ 的估计。假设使用线速度和角速度的测量，以及来自 GPS 和指南针的机器人状态测量，机器人的位姿估计 $(\hat{X}_r, P_r)$ 是通过航迹推算获得的。机器人对地标位置的相对方位测量 $z \in S^1$ 是在机器人内部获得的，并用于更新机器人位姿和地标位置的估计 $(\hat{X}_r, P_r)$ 和 $(\hat{p}_l, P_l)$ 。

A. 移动机器人模型

令 $x_r, y_r \in \mathbb{R}$ 表示机器人的 x-y 坐标，令 $\theta_r \in S^1$ 表示机器人相对于全局参考系的航向角（逆时针测量，相对于 x 轴)。记

$$p_r \triangleq \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix},\ R_r \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & -\sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r) & \cos(\theta_r) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

我们考虑作为 SE(2) 行为子集的非完整运动模型，即单车模型，其中机器人的机体固定帧速度被限制在前进方向。分别用 $v_r \in \mathbb{R}$ 表示机器人的前进速度，$\omega_r \in \mathbb{R}$ 表示机体固定帧偏航率。用 $X_r(k) \triangleq [x_r(k)\ y_r(k)\ \theta_r(k)]^\top$ 和 $u_r(k) \triangleq [v_r(k)\ w_r(k)]^\top$ 分别表示机器人在时间 k 的位姿和运动扭曲。注意，我们使用的是 3 向量的更紧凑表示方式，而不是 3×3 矩阵表示方式。给定时间步长的离散化 τ ，移动机器人的一阶欧拉离散时间单车模型为

$$\begin{aligned} X_r(k+1) &= f_r(X_r(k), u_r(k)) \\ &= X_r(k) + \tau \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(k)) & 0 \\ \sin(\theta_r(k)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

B. 使用机器人特定测量的机器人姿态滤波器

在本节中，我们假设能够获得常规的前进速度和偏航率测量，以及移动机器人的偶尔状态测量。我们使用 EKF 的预测和更新步骤来估计机器人的位姿及其误差协方差。

令 $v^m = v_r + \delta_v$ 和 $w^m = w_r + \delta_w$ 分别表示测量得到的前进速度和偏航率。我们假设它们受到了均值为零的高斯误差 $\delta_v \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ 和 $\delta_w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ 的干扰，且 $\sigma_v, \sigma_w > 0$ 分别表示它们的标准差。令 $u_m(k) \triangleq [v^m(k)\ w^m(k)]^\top$ 表示在时刻 k 的测量扭曲。

离散时间预测的估计位姿是 (10) 的期望值，

$$\hat{X}_r(k+1) = f_r(\hat{X}_r(k), u_r^m(k)),\ \hat{X}_r(0) = \hat{X}_{r,0}. \tag{11}$$

中，$\hat{X}_{r,0} \triangleq [\hat{x}_{r,0}\ \hat{y}_{r,0}\ \hat{\theta}_{r,0}]^\top$ 表示机器人的初始位姿估计。用 $P_{r,0} > 0$ 表示初始位姿估计的估计误差协方差。EKF 预测步骤产生

$$\begin{aligned} P_r(k+1) &= A_r(k)P_r(k)A_r^\top(k) + B_r(k)QB_r^\top(k), \\ P_r(0) &= P_{r,0}, \\ A_r(k) &\triangleq \nabla_{X_r} f_r(\hat{X}_r(k), u_m(k)) \\ &= \begin{bmatrix} I_{2\times2} & \begin{matrix} -\tau\sin(\hat{\theta}_r(k))v^m(k) \\ \tau\cos(\hat{\theta}_r(k))v^m(k) \end{matrix} \\ 0_{1\times2} & 1 \end{bmatrix}, \\ B_r(k) &\triangleq \nabla_{u_r} f_r(\hat{X}_r(k), u_m(k)) \\ &= \begin{bmatrix} \tau\cos(\hat{\theta}_r(k)) & 0 \\ \tau\sin(\hat{\theta}_r(k)) & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}, \\ Q &\triangleq \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

1) 更新 ：假设我们通过类似 GPS 和磁力计的设备获得运动中机器人状态的偶然测量，

$$Y_r(k) = X_r(k) + \delta_r(k). \tag{13}$$

在这里，$Y_r(k) \in \mathbb{R}^3$ 是 $X_r(k)$ 的全状态噪声测量，而 $\delta_r \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_r)$ 是测量误差，其测量误差协方差矩阵为 $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{3\times3} > 0$ 。我们使用 EKF 更新步骤更新机器人状态和误差协方差的估计，

$$\begin{aligned} K_r(k) &= P_r(k)(P_r(k) + \Sigma_r)^{-1}, \\ \hat{X}_r^+ &= \hat{X}_r(k) + K_r(k)(Y_r(k) - \hat{X}_r(k)), \\ P_r^+ &= (I - K_r(k))P_r(k). \end{aligned} \tag{14}$$

C. 相对方位测量

在每个时间点 k ，机器人测量到地标位置的方位角 $\theta_{rl}^m(k) \in S^1$ ，其中 $\theta_{rl}(k), \delta_{\theta_{rl}}(k) \in S^1$ 分别表示真实方位角和测量误差角。我们假设 $\delta_{\theta_{rl}}(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta_{rl}}^2)$ ，其中 $\sigma_{\theta_{rl}} \in S^1$ 是测量误差的标准差。用

$$\begin{aligned} \phi(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta_{rl}(k)) \\ \sin(\theta_{rl}(k)) \end{bmatrix} = \frac{R_r^\top(k)(p_l - p_r(k))}{\|p_l - p_r(k)\|} \quad \text{and} \\ z(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta_{rl}^m(k)) \\ \sin(\theta_{rl}^m(k)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

分别表示真实方位和测量方位。我们可以利用这个相对测量来更新机器人的状态和误差协方差估计，以及地标的状态估计 $\hat{p}_l(k)$ 和误差协方差估计 $P_l(k) \in \mathbb{R}^{2\times2}$ 。以下的代价函数捕捉了相对方位测量 $z(k)$ 相对于机器人和地标状态的不确定性，该代价函数是在目标跟踪文献中提出的 [12] 并捕捉了唯一非平凡子空间中的测量误差，该子空间与测量方位 $z(k)$ （在机器人在时刻 k 的体固定框架内）垂直。注意，测量方位方向 z 的期望值等于真实方位方向 ϕ 。此外，期望中，$I - zz^\top$ 是一个投影到和真实方位方向 ϕ 垂直的子空间（方向)。因此，期望中有 $(I - zz^\top)R_r^\top(p_l - p_r) = (I - zz^\top)\phi\|p_l - p_r(k)\| = 0$ 。因此，最小化这个代价函数选择了一个与测量方位方向具有最小期望方位误差的机器人-地标估计。

D. 模块化机器人-地标定位

在这一部分中，我们应用模块化融合算法 (8) 到机器人-地标定位问题。表示

$$
\begin{aligned}
z^{\perp} &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_{rl}^m) \\ \cos(\theta_{rl}^m) \end{bmatrix}, \ \hat{R}_r \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}_r) & -\sin(\hat{\theta}_r) \\ \sin(\hat{\theta}_r) & \cos(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix} \\
\tilde{z} &\triangleq \hat{R}_r z^{\perp}, \\
U_r &\triangleq \begin{bmatrix} -I_{2\times 2} & \begin{matrix} (\hat{y}_l - \hat{y}_r) \\ -(\hat{x}_l - \hat{x}_r) \end{matrix} \end{bmatrix}, \\
H_r &\triangleq (I - zz^\top)\hat{R}_r^\top U_r = \hat{R}_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top U_r, \\
\tilde{W}_r &\triangleq \left(\sigma_{\theta_{rl}}^2 I + H_r P_r H_r^\top\right), \ \gamma_r \triangleq \sqrt{\tilde{z}^\top U_r P_r U_r^\top \tilde{z}}, \\
H_l &\triangleq (I - zz^\top)\hat{R}_r^\top, \\
\tilde{W}_l &\triangleq \left(\sigma_{\theta_{rl}}^2 I + H_l P_l H_l^\top\right), \ \gamma_l \triangleq \sqrt{\tilde{z}^\top P_l \tilde{z}}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

1) 地标子系统： 应用引理 1 到联合成本函数 (??) 得到

$$
J_z^*(p_l) = \frac{1}{2}\|(I - z(k)z(k)^\top)\hat{R}_r^\top(k)(p_l - \hat{p}_r(k))\|_{\tilde{W}_r^{-1}}^2. \tag{17}
$$

从 (6)，地标融合算法为

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_l^+ &= \hat{p}_l - (1-\alpha_l^*)P_l^+ S_l^{-1}(\hat{p}_l - \hat{p}_r), \\
P_l^+ &= \left(\alpha_l^* P_l^{-1} + (1-\alpha_l^*)S_l^{-1}\right)^{-1}, \\
S_l^{-1} &\triangleq \tilde{z}\tilde{z}^\top \hat{R}_r \tilde{W}_r^{-1} \hat{R}_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top \\
&= \tilde{z}\tilde{z}^\top(\sigma_{\theta_{rl}}^2 I + \tilde{z}\tilde{z}^\top U_r P_r U_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top)^{-1}\tilde{z}\tilde{z}^\top \\
&= \frac{1}{\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_r^2}\tilde{z}\tilde{z}^\top.
\end{aligned} \tag{18}
$$

使用 Sherman-Morrison 公式来消除矩阵逆，这简化为

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_l^+ &= \hat{p}_l - (1-\alpha_l^*)\frac{P_l^+}{\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_r^2}\tilde{z}\tilde{z}^\top(\hat{p}_l - \hat{p}_r), \\
P_l^+ &= \frac{1}{\alpha_l^*}\left(P_l - \frac{P_l \tilde{z}\tilde{z}^\top P_l}{\frac{\alpha_l^*(\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_r^2)}{1-\alpha_l^*} + \tilde{z}^\top P_l \tilde{z}}\right), \\
\alpha_l^* &= \underset{0\le\alpha\le 1}{\operatorname{argmin}} \det \frac{1}{\alpha}\left(P_l - \frac{P_l \tilde{z}\tilde{z}^\top P_l}{\frac{\alpha(\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_r^2)}{1-\alpha} + \tilde{z}^\top P_l \tilde{z}}\right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

应用引理 1 到联合代价函数 (??) 得到

$$
J_z^*(X_r) = \frac{1}{2}\|(I - z(k)z(k)^\top)R_r^\top(\hat{p}_l(k) - p_r)\|_{\tilde{W}_l^{-1}}^2. \tag{20}
$$

。由 (6) 得知，机器人融合算法是

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_r^+ &= \hat{X}_r - (1-\alpha_r^*)P_r^+ U_r^\top S_r^{-1}(\hat{p}_l - \hat{p}_r), \\
P_r^+ &= \left(\alpha_r^* P_r^{-1} + (1-\alpha_r^*)U_r^\top S_r^{-1} U_r\right)^{-1}, \\
S_r^{-1} &\triangleq \tilde{z}\tilde{z}^\top \hat{R}_r \tilde{W}_l^{-1} \hat{R}_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top \\
&= \tilde{z}\tilde{z}^\top(\sigma_{\theta_{rl}}^2 I + \tilde{z}\tilde{z}^\top P_l \tilde{z}\tilde{z}^\top)^{-1}\tilde{z}\tilde{z}^\top \\
&= \frac{1}{\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_l^2}\tilde{z}\tilde{z}^\top.
\end{aligned} \tag{21}
$$

。使用 Sherman-Morrison 公式来消除矩阵逆，可以简化为

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_r^+ &= \hat{X}_r - (1-\alpha_r^*)\frac{P_r^+}{\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_l^2}U_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top(\hat{p}_l - \hat{p}_r), \\
P_r^+ &= \frac{1}{\alpha_r^*}\left(P_r - \frac{P_r U_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top U_r P_r}{\frac{\alpha_r^*(\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_l^2)}{1-\alpha_r^*} + \tilde{z}^\top U_r P_r U_r^\top \tilde{z}}\right), \\
\alpha_r^* &= \underset{0\le\alpha\le 1}{\operatorname{argmin}} \det \frac{1}{\alpha}\left(P_r - \frac{P_r U_r^\top \tilde{z}\tilde{z}^\top U_r P_r}{\frac{\alpha(\sigma_{\theta_{rl}}^2 + \gamma_l^2)}{1-\alpha} + \tilde{z}^\top U_r P_r U_r^\top \tilde{z}}\right).
\end{aligned} \tag{22}
$$

。在本节中，我们提供一个使用与模块化算法相同测量的非模块化机器人地标估计算法。该算法将作为 I 节分析的基准。让我们构建联合机器人-地标状态 $X \triangleq [x_r\ y_r\ \theta_r\ x_l\ y_l]$。那么联合状态模型在离散时间的运动学是

$$
\begin{aligned}
X(k+1) &= f(X(k), u(k)), \\
&= X(k) + \tau \begin{bmatrix} \cos(\theta_r(k)) & 0_{2\times 1} \\ \sin(\theta_r(k)) & \\ 0 & 1 \\ 0_{2\times 2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{23}
$$

。给定联合模型，EKF 预测的联合状态和误差协方差估计与仅用于机器人姿态的类似，

$$
\begin{aligned}
\hat{X}(k+1) &= f(\hat{X}(k), u_m(k)), \\
P(k+1) &= A(k)P_r(k)A^\top(k) + B(k)QB^\top(k), \\
P(0) &= \operatorname{diag}(P_{r,0}, P_{l,0}), \\
A(k) &\triangleq \nabla_X f(\hat{X}(k), u_m(k)) = \begin{bmatrix} A_r(k) & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & I_{2\times 2} \end{bmatrix}, \\
B(k) &\triangleq \nabla_u f(\hat{X}(k), u_m(k)) = \begin{bmatrix} B_r(k) \\ 0_{2\times 2} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

。就联合状态而言，测量方程 (13) 是

$$
Y_r(k) = CX(k) + \delta_r(k), \ C \triangleq \begin{bmatrix} I_{3\times 3} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}. \tag{25}
$$

。EKF 对联合状态和误差协方差估计的更新是

$$
\begin{aligned}
K(k) &= P(k)C^\top(CP(k)C^\top + \Sigma_r)^{-1}, \\
\hat{X}^+ &= \hat{X}(k) + K(k)(Y_r(k) - C\hat{X}(k)), \\
P^+ &= (I - K(k)C)P(k).
\end{aligned} \tag{26}
$$

。

2) 联合状态轴承更新： 角度测量 (??) 包含关于地标和机器人状态的信息。考虑最小二乘代价

$$
\begin{aligned}
J(X) &= \frac{1}{2}\|X(k) - \hat{X}(k)\|_{P^{-1}(k)}^2 + J_z(X), \\
J_z(X) &= \frac{1}{2\sigma_{\theta_{rl}}^2}\|(I - zz^\top)R_r^\top(p_l - p_r)\|^2.
\end{aligned} \tag{27}
$$

回忆一下从方程 (16) 中 $\tilde{z}$ 的定义，并表示为

$$
U \triangleq \begin{bmatrix} -I & \begin{matrix} -(\hat{y}_l - \hat{y}_r) \\ (\hat{x}_l - \hat{x}_r) \end{matrix} & I \end{bmatrix}. \tag{28}
$$

那么最小二乘联合状态更新方程为

$$\hat{X}^{+}=\hat{X}-P^{+}\left(U^{\top}S^{-1}(\hat{p}_l-\hat{p}_r)\right),$$
$$P^{+}=\left(P^{-1}+S^{-1}\right)^{-1}=P-\frac{PU^{\top}\tilde{z}\tilde{z}^{\top}UP}{\sigma_{\theta_{rl}}^2+\tilde{z}^{\top}UPU^{\top}\tilde{z}}, \quad (29)$$
$$S^{-1}\triangleq\frac{1}{\sigma_{\theta_{rl}}^2}U^{\top}\tilde{z}\tilde{z}^{\top}U.$$

I. 模拟研究

在本节中，我们提供了一个随机仿真研究，以评估在第 -B 节和第 -D 节中提出的模块化机器人-地标定位算法与第 ?? 节中作为本研究基准的非模块化（联合状态）方法的性能比较。我们还将在本研究中加入第 -D 节中提出的模块化算法的三个其他版本，它们具有降低的通信需求、降低的计算需求或两者兼有。减少通信的变体仅允许在子系统之间共享状态估计，而不共享误差协方差估计。这意味着不需要相对测量权值矩阵调整（引理 1 ）。这种减少通信的方法将被称为“安全”而不是被称为“FSafe”（完全通信，不重复计算相关信息而安全）的所提出的方法。这两种方法的减少计算变体将忽略在子系统之间共享的估计是相关的事实，并且将执行标准最小二乘（或在 [4] 中的卡尔曼融合）而不是 CI 最小二乘融合步骤（引理 2 ）。这相当于不需要计算最佳凸权 α^*（$\alpha^*\longleftarrow 1$ 和 $(1-\alpha^*)\longleftarrow 1$ ）。这些减少计算的方法将分别被称为“Kalman”（减少通信和计算）和’FKalman’（完全通信但减少计算）。基线非模块化方法将被称为’Joint’。

A. 情景

考虑一个围绕原点的宽为 $30m$ 的正方形区域，机器人初始位置 $p_r(0)\sim\mathcal{U}([-13,-13]^{\top},[13,13]^{\top})$ 和地标初始位置 $p_l\sim\mathcal{U}([-7.5,-7.5]^{\top},[7.5,7.5]^{\top})$ 均均匀随机放置。机器人的初始航向角为 $\theta_r\sim\mathcal{U}(0,2\pi)$ 。它们的初始估计也均匀随机选择为 $\hat{p}_r(0),\hat{p}_l(0)\sim\mathcal{U}([-15,-15]^{\top},[15,15]^{\top})$ 和 $\hat{\theta}_r(0)\sim\mathcal{U}(0,2\pi)$ ，而它们的初始误差协方差估计为 $P_r=\mathrm{diag}([100,400,(\pi/18)^2])$ 和 $P_l=9000I_{2\times2}$ 。测量误差的标准差分别为 $\sigma_v\sim|\mathcal{N}(0,0.25)|$ 、$\sigma_w\sim|\mathcal{N}(0,(\pi/90)^2)|$ 、$\Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_r^2)$，$\sigma_r\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{diag}([25,25,(7\pi/180)^2]))$ 和 $\sigma_{rl}\sim|\mathcal{N}(0,(7\pi/180)^2)|$ 。所有方法始终接收机器人的扭转测量，但每隔 3 时间步接收 GPS/指南针（机器人状态）测量，以及每隔 6 时间步接收相对方位测量。机器人以随机游走的方式在 $T=100$ 时间步（$k=0,\cdots,T$ ）内保持在正方形区域内，固定的前进速度为 $v_r(k)\equiv 1$ ，半随机的偏航率为 $w_r(k+1)=0.4w_r(k)+0.6\delta$ ，其重新定位至原点以避免机器人退出正方形区域。

B. 结果

我们在第 I-A 节中模拟 20000 次随机化场景，并在第 I 节中比较所述的 5 种方法的性能。我们根据这些方法在每次重复结束时所获得的地标估计误差（即 $e_l(T)\triangleq\|p_l-\hat{p}_l(T)\|$ ）来评估它们的性能。图 1 显示了我们所有实验中该误差分布的箱型图。

正如预期，‘Joint’ 方法在总体内点性能上表现最佳，而在异常值方面，错误较提议的方法更高，从而导致误差分布的均值和标准差略高（见下一页的表格 ?? ）。这些异常值可能是由于 ‘Joint’ 方法中较大的矩阵计算导致的

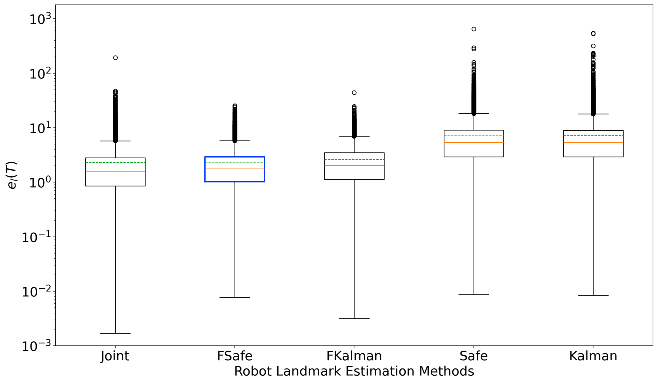

Fig. 1. 每个实验结束时标志估计误差 $e_l(T)$ 的分布箱线图。注意，y 轴为对数刻度。与所提出的方法 FSafe 相关的箱线图以蓝色突出显示。每个箱线图中的橙色线表示分布的中位数，而箱体范围从第一四分位数到第三四分位数，括号延伸到超过此范围的 1.5 倍四分位距（IQR）。离群值显示为小圆圈。分布的均值显示为绿色虚线。

数值问题。然而，‘Joint’ 方法并不具备我们所提出的模块化特性，主要作为本研究的比较基准。所提议的方法 ‘FSafe’ 紧随其后，在内点性能上表现良好，并且具有模块性和更少的异常值，从而在误差分布的均值和标准差上表现更好。同样值得注意的是，可以通过降低性能的方式，达到额外的计算（‘FKalman‘）、通信（‘Safe‘）或两者（‘Kalman‘）的节省，至少在本研究的场景中是这样。

请注意，尽管考虑了极端的噪声环境，我们基于非线性最小二乘法的方位机器人-地标定位算法非常稳健，平均能实现地标定位精度接近 2.3 米，初始估计误差可达 20 米。重要的是，模块化方法几乎保留了全维联合估计算法的性能，甚至产生的异常值更少，这表明模块化方法在关注点分离方面的优势。

II. 结论

在本文中，我们提出了一种模块化非线性最小二乘滤波方法。我们认为，模块化对于管理复杂性是有益的（例如状态矢量表示的大小和误差协方差矩阵），关注点的分离（如果一个滤波器发散，则其他滤波器不会立即受到影响），以及从系统工程和维护的角度来看（我们可以替换其中一个滤波器为另一个滤波器而不改变其他滤波器）。我们提出了一种方法，能够在信息流图中出现的模块化方法环路情况下是安全的（即提供误差协方差 [4] 的保守估计）。我们还专门针对使用相对方位测量的 2D 机器人地标定位问题提供了这种方法的推导。该问题的变体在许多重要的机器人应用中出现。我们还讨论了我们的方法的三种变体，通过放宽对通信、计算或两者的要求来优雅地降级性能。我们提供了一项大型随机模拟研究，展示了这些想法并在实践中验证了我们的主张。

References

[1] J. K. Uhlmann, “Covariance consistency methods for fault-tolerant distributed data fusion,” *Information Fusion*, vol. 4, no. 3, pp. 201–215, 2003.

[2] L. Chen, P. O. Arambel, and R. K. Mehra, “Estimation under unknown correlation: Covariance intersection revisited,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 11, pp. 1879–1882, 2002.

[3] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.

[4] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations," in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No. 97CH36041)*, vol. 4. IEEE, 1997, pp. 2369–2373.
[5] ——, "Using covariance intersection for slam," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 3–20, 2007.
[6] P. O. Arambel, C. Rago, and R. K. Mehra, "Covariance intersection algorithm for distributed spacecraft state estimation," in *Proceedings of the 2001 American Control Conference.(Cat. No. 01CH37148)*, vol. 6. IEEE, 2001, pp. 4398–4403.
[7] L. C. Carrillo-Arce, E. D. Nerurkar, J. L. Gordillo, and S. I. Roumeliotis, "Decentralized multi-robot cooperative localization using covariance intersection," in *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 1412–1417.
[8] T.-K. Chang, K. Chen, and A. Mehta, "Resilient and consistent multirobot cooperative localization with covariance intersection," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 38, no. 1, pp. 197–208, 2021.
[9] B. D. O. Anderson and J. Moore, *Optimal filtering*. Prentice Hall, 1979.
[10] L. Chen, P. O. Arambel, and R. K. Mehra, "Fusion under unknown correlation-covariance intersection as a special case," in *Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion. FUSION 2002.(IEEE Cat. No. 02EX5997)*, vol. 2. IEEE, 2002, pp. 905–912.
[11] M. Reinhardt, B. Noack, P. Arambel, and U. Hanebeck, "Minimum covariance bounds for the fusion under unknown correlations," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, pp. 1210–1214, 2015.
[12] A. G. Lingren and K. F. Gong, "Position and velocity estimation via bearing observations," *IEEE Transactions on Aerospace and electronic systems*, no. 4, pp. 564–577, 1978.