

具有神经振幅编码的量子视觉场

Shuteng Wang Christian Theobalt Vladislav Golyanik*
MPI for Informatics, SIC, Germany

Abstract

量子隐式神经表示 (QINRs) 包括在基于门的量子计算机上进行学习和执行的组件。尽管 QINRs 最近作为一种有前景的新范式出现, 但有关其架构和变分形式的设计、量子机械特性的实用性、训练效率以及与经典模块的相互作用仍存在许多挑战。本文通过介绍一种用于 2D 图像和 3D 几何场学习的新型 QINR, 推动了这一领域的发展, 我们统称其为量子视觉场 (QVF)。QVF 使用神经振幅编码将经典数据编码到量子态向量中, 并基于一个可学习的能量流形确保有意义的希尔伯特空间嵌入。我们的变分形式遵循一个可学习参数化量子电路的完全纠缠设计, 在实希尔伯特空间中执行量子 (么正) 操作, 从而实现数值稳定的训练和快速收敛。QVF 不依赖经典后处理——与之前的 QINR 学习方法相反——而是直接使用投影测量来提取变分形式中编码的学习信号。在量子硬件模拟器上的实验表明, QVF 在视觉表示精度方面优于现有的量子方法和广泛使用的经典基础基准, 无论是在学习高频细节等各种指标和模型特征方面。我们还展示了 QVF 在 2D 和 3D 场完整性及 3D 形状插值中的应用, 突显其实际潜力¹。

隐式神经表示 (INRs) 作为通过神经网络持续建模信号的一个强大框架已经出现。它们在图像和三维形状合成以及三维重建等视觉计算领域中取得成功并被广泛使用。INRs 将空间 (以及时间) 坐标映射到对应的信号值, 实现了分辨率无关、内存高效和可微分的表示; 信号编码网络 f_θ 通过参数 θ 的训练以最小化采样坐标 $\mathbf{x}$ 上的重建损失 $\mathcal{L}(\theta)$: 其中 $\mathcal{X}$ 表示采样域, $S(\mathbf{x})$ 是要被 f_θ 表示的信号值。作为对 INR 所需不断增长的计算、内存和能源需求的补救, 近期的工作探索了将量子电路集成到 INR 中, 作为经典方法的一个有前景的替代方案, 具有模型紧凑性和学习效率方面的潜在优势。量子算法在 Hilbert 空间中操作, 能够进行状态的叠加和纠缠, 这超越了具有可比资源规模的经典系统中的并行处理。涉及参数化量子电路 (PQCs) 或 ansätze 的量子机器学习 (QML) 模型通过么正变换 (实现为量子门序列) 参数化量子态的演变, 所需参数数量与 Hilbert 空间维数对数成比例。最近的研究进

一步揭示了 PQCs 与基于傅里叶的学习机制之间的内在联系, 这是实现频谱无偏学习或减轻在经典神经网络中常见的频谱偏见的关键特征。这些见解共同建议了一条通往高效且表现力强的视觉计算用量子机器学习模型的路径。尽管其理论上具有潜力, 量子隐式神经表示 (QINR) 仍然在架构和实验视角上未被充分探索。最近推出的 QIREN 方法 [65] 是该领域中首批为图像表示、上采样和生成设计的方案之一。QIREN 将查询坐标投射到可学习的傅里叶特征中, 并与一个经典的网络解码器配对, 明确地将其与傅里叶神经架构联系起来。与此同时, 由于繁重的经典后处理, 它可能会掩盖量子行为。此外, QIREN 的设计允许学习相对较小分辨率 (例如, 32×32 像素) 的二维 QINR, 但不能学习其集合或三维信号。为应对这些限制, 我们提出了量子视觉场 (QVF), 这是一种新的基于坐标的量子机器学习模型, 利用高维希尔伯特空间实现轻量化和光谱上无偏的隐式视觉场表示; 参见图 ??-(a) 的方案。我们不需要经典的后处理。与其使用启发式的经典到量子数据编码方法——这些方法 (不合理地) 假设手工制作的嵌入与量子电路的归纳偏差对齐——我们引入了一种新颖的可学习能量模块, 该模块编码非线性数据先验, 以对齐经典欧几里得和量子希尔伯特特征表示。我们精心设计的量子电路利用量子态演化和量子比特之间的纠缠, 有效地探索了优化的测量前量子态表示。具体而言, QVF 中可达的希尔伯特空间受到限制, 以稳定梯度流并缓解诸如贫瘠高原 (如由于哈尔随机性引起的梯度消失) 等问题, 而不影响表现力。通过对潜在变量进行条件化, 量子电路被测量以生成多维信号, 例如图像或三维几何体, 或其集合 (图 ??-(b))。总之, 本文的技术贡献包括:

- QVF, 一种基于坐标的新的量子机器学习模型, 用于视觉表示学习 (2D 图像和 3D 符号距离场)。QVF 方法被设计用于在未来的量子机器模拟器或容错门型量子计算机上执行。
- 一个用于将经典数据编码为量子态幅度的非线性神经方案。我们的神经幅度编码基于一个可学习的能量流形, 确保有意义的希尔伯特空间嵌入。
- 一个有效的 PQC, 它在真实的希尔伯特子空间内处理纠缠信息, 专门设计用于通过限制 Haar 随机性来提供稳定的梯度反馈。

我们评估了 QVF, 并将其与主要竞争对手进行比较, 即之前用于 2D 图像表示学习的 QINR 方法 QIREN,

*Corresponding author's email: golyanik@mpi-inf.mpg.de

¹项目页面: <https://4dqv.mpi-inf.mpg.de/QVF/>

此外，还比较了几个基础的经典 INR 基线（用于 2D 图像和 3D 形状表示学习）。实验在基于门的量子硬件模拟器 [8] 上进行。QVF 始终优于 QIREN 和其他比较的技术。此外，QVF 支持超出之前 QINR 框架所能处理的问题规模和应用，例如图像修复、形状补全和潜在空间插值（图 ??-(c)），朝着在实际场景中解锁量子模型迈进了一步。

1. 相关工作

经典神经网络 2D/3D 场景表示。神经网络作为现代隐式场景表示的基础，利用连续函数逼近来规避基于离散网格的方法的限制 [14, 15, 30, 39, 58]。最初的突破是使用多层感知器 (MLPs) 来建立坐标到属性的映射，这在 Chen 等人的 [15] 任意尺度的超分辨率连续隐式模型，以及 Dupont 等人的 [17] COIN 框架中得到了展示，该框架优化了神经参数化以实现高效的图像压缩与重建。此范式已被扩展至 3D 表示，取代了传统的体素和网格方法：DeepSDF [41] 通过学习有符号距离场 (SDFs) 实现几何一致的表面重建。虽然经典的神经方法取得了显著的成功，但基于门的量子计算在从根本上增强 INRs 方面具有巨大潜力。

量子增强计算机视觉。随着对应用量子计算的兴趣日益增长，新兴的领域即为量子增强计算机视觉 (QeCV)。当前的文献主要探讨了用于组合优化的量子退火机 [7, 10, 18, 20, 35, 63]，而对参数化量子电路 (PQCs) 的研究仍然较少。早期的工作引入了如通过局部卷积操作进行量子图像去噪的概念 [52]，以及具有中途电路测量的量子卷积神经网络 (QCNNs) 来模拟平移等变性 [16]。随后的进展包括通过体素化和量子特征处理进行 3D 点云分类的混合量子-经典架构 [4]，以及通过手工设计振幅嵌入进行经典数据压缩的量子自编码器 [43]。我们的工作灵感来自于 3D-QAE [43]，这是第一个使用手工设计的量子振幅嵌入进行稀疏 3D 点云自动编码的模型。作者指出，该方法在可扩展性方面存在局限性，并且性能不及经典模型。与我们的工作密切相关的是赵等人在论文 [65] 中的 QIREN，其采用了一种三明治结构，即在经典预处理和后处理之间放置一个量子电路层。他们利用电路的傅里叶处理特性将查询投影到傅里叶特征中，随后用经典的密集层进行推理。这与经典傅里叶编码有相似之处，傅里叶频谱的大小呈指数增长。虽然该方法在理论上有良好的动机，但其实际实用性仍有争议，因为对重型经典后处理的依赖将量子部分简化为单纯的特征提取器，从而削弱了潜在的计算优势。相比之下，我们的框架避免了这种后处理，并更多依赖于参数化量子态；有关算法的比较见表 ??。我们使用了一种可学习的、基于能量的玻尔兹曼调节幅度编码，这是展示量子计算潜力的重要一步，其经验证据见第 4 节。同时，我们精心设计的参数化量子态演化编码数据并确保稳健的梯度反馈。

2. 基于门的量子计算综述

基于门的量子计算通过对量子比特应用一系列么正操作提供了一个用于量子信息处理的通用框架，利用单量子比特门如泡利旋转 $R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2}$ 、 $R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2}$ 和 $R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2}$ （其中 X 、 Y 、 Z 是泡利矩阵）进行任意状态操作，并使用纠缠门 (CNOT、CZ、iSWAP) 产生非经典（量子力学）相关性。如果一个门集合能够任意精确地逼近任何么正变换，那么它就是通用的。Solovay-Kitaev 定理 [40, App. 3] 保证了使用这样的集合进行有效近似，从而为该模型中的通用量子电路奠定了理论基础。在 QVF（第 3 节）中，应用于量子比特状态向量的量子门的最优参数（如 θ ）从数据中学习，而量子演化的配置是预定义的。这种设置在文献中称为量子机器学习 (QML) [9]，因为量子门取代了经典神经网络的权重。我们在附录 A 中提供了有关量子计算、常用符号和 QML 的更详细背景和回顾。

3. 我们的 QVF 方法

本节介绍了所提出的 QVF 模型，即用于学习视觉表示及其集合的 QINR；其架构见图 1。QVF 以查询坐标 Θ 和一个可选的潜变量 z （在需要表示多个视觉场景的情况下）作为输入，并生成二维或三维场属性 s 。我们在第 3.1 节中介绍了利用神经幅度编码将数据嵌入到量子态向量中，而量子电路设计和测量详细信息则在第 ?? 节中给出。第 ?? 节提供了 QVF 支持的训练细节和应用。

3.1. 振幅编码与神经嵌入

我们参数化的基于能量的经典数据嵌入 x 到量子状态 $|\psi_{in}(x)\rangle$ 的方法推广了广泛使用的人工设计的振幅编码 (AE) [43, 47]。通过利用量子叠加态，AE 能够将 $N = 2^n$ 的经典值以一种指数紧凑的方式编码到 n 的量子比特概率振幅中。值得注意的是，这意味着由于量子态相位的固有周期性，AE 会诱导指数多的随机傅里叶特征。人工设计的 AE 的根本限制在于其事前可能偏向的准备好的量子态，这可能导致与后续量子演化的不匹配或任务特定数据傅里叶先验的次优利用。因此，我们提出了一种数据驱动的 AE 方法，可以直接从数据中学习最优的量子态密度 $\hat{\rho}_{opt}(x)$ ，即在我们的例子中为 QINR。我们处理满足 $\text{Tr}(\hat{\rho}(x)^2) = 1$ 的纯量子态。借鉴物理系统（例如，统计和量子力学）中固有的能量-概率二元性，我们推断给定视觉表示的条件能谱 E 并将其转化为概率分布 P ，随后被编码为复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的量子比特状态振幅 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 。我们的编码将非线性引入量子电路，同时保留量子电路演化和测量的全部能力，并促进 ansatz 表达能力²。对于能量推断，我们采用一个最小密集 MLP $f(x = \{\Theta, z\}) : \gamma(\Theta) \times z \rightarrow E$ ，有两种设置：1) ReLU 激活与位置编码 [37, 42] 或 2)

²量子电路中的变换在测量之前是么正的，这通常被视为 ansatz 表达能力的关键限制

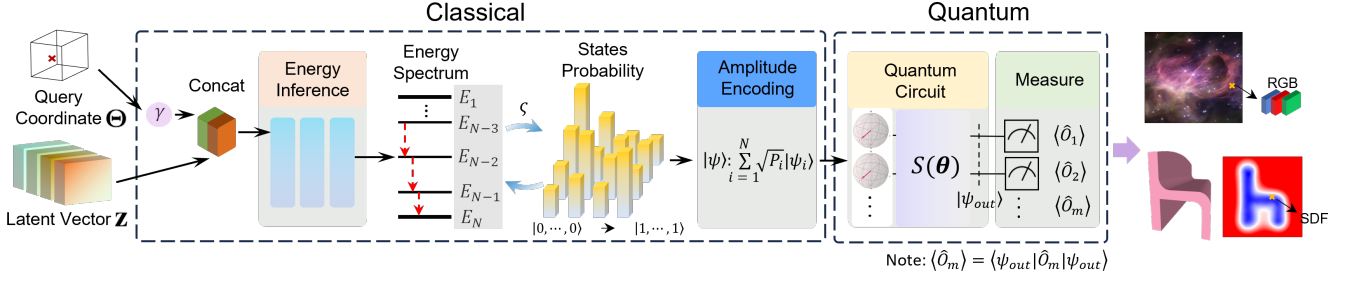


Figure 1. 提出的 QVF 模型的概述，一个用于视觉表示学习的 QML 框架。使用 γ （位置编码）编码的查询坐标 Θ 与条件潜在编码 z 连接在一起，用于推断量子系统的能谱 E ，该谱能与玻尔兹曼调节的统计不确定性 P 相关联。推断的统计性质用于将经典数据编码为量子状态矢量，随后由参数化量子电路 $S(\theta)$ 处理。生成的视觉场属性直接从投影电路测量中解码（无需进一步后处理）。

Siren [53] :

$$\gamma(\Theta) = (\dots, \sin(2^{L-1}\pi\Theta), \cos(2^{L-1}\pi\Theta), \dots). \quad (1)$$

Θ 表示字段查询坐标，而 z 代表学习视觉字段集合时的潜码。推断出的 $E = f(\gamma(\Theta), z)$ 被用于导出受 Boltzmann 调节的量子系统的 P ；吉布斯-玻尔兹曼框架 ζ 充当封装热力学不确定性的归纳嵌入偏差，使得吉布斯量子态得以实现 [3, 5]。

我们接下来构建从 Gibbs 正则系综中导出的离散化能量景观 E ，从而形成 $P = [P_i]$ 、 $i \in \{1, \dots, N\}$ ：

$$P = \frac{\exp(-\beta E(\Theta, z))}{\mathcal{Z}}, \text{ where} \quad (2)$$

$$\mathcal{Z} = \int \exp(-\beta E(\Theta, z)) d\Theta \approx \sum_{j=1}^N \exp(-\beta E_j(\Theta, z)), \quad (3)$$

，其中 $\beta = (k_B T)^{-1}$ 代表逆温度。量子态振幅 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ，位于复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ ，通过其复相位 $\phi_i = \arg(\alpha_i)$ 进行表征，其在间隔 $[0, 2\pi)$ 内是任意的，需满足归一化条件 $\|\alpha_i\|_2^2 = P_i$ （确保满足 Born 规则 $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ ）。最后，量子态 $|\psi_{in}(\Theta, z)\rangle$ 用于为我们的输入（二维或三维）领域的查询坐标进行编码，准备方式如下：

$$|\psi_{in}(\Theta, z)\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i |\psi_i\rangle, \quad \alpha_i = \sqrt{P_i} e^{i \cdot \arg(\alpha_i)},$$

$$\hat{\rho}(\Theta, z) = |\psi_{in}(\Theta, z)\rangle \langle \psi_{in}(\Theta, z)| = \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j^+ |\psi_i\rangle \langle \psi_j|. \quad (4)$$

$|\psi_i\rangle$ 是计算基， $\hat{\rho}(\Theta, z)$ 是 $|\psi_{in}(\Theta, z)\rangle$ 的密度分布，“ $(\cdot)^+$ ”表示伴随态。

一旦经典数据被编码到 $|\psi_{in}(\Theta, z)\rangle$ 中，它将在高维 Hilbert 空间中被我们可学习的 PQC 或 ansatz $\hat{S}(\theta)$ 处理。我们的目标是为 QINR 学习提供一个紧凑且具有表现力的 PQC。Hilbert 空间的不受限制变换可能需要复杂的量子门序列，并可能导致训练不稳定性，例如贫

瘠高原 (barren plateaus) ³。因此，为了确保高效的 QVF 训练，我们将 $\hat{S}(\theta)$ 限制为由 Pauli-Y 旋转和纠缠门构成的实值酉操作，因为 Pauli-X 和-Z 门引入的虚部会导致对整个 Bloch 球面的不受限探索。我们的 PQC 结构类似于经典的密集连接神经网络，即包含交替层的参数化单量子比特 Pauli-Y 旋转和纠缠操作，支持强相关的、非局域量子态，这些量子态无法分解为单个量子比特的张量积。这种设计为 QINR 学习提供了关键的优势：(1) 它将状态演化限制在实 Hilbert 子空间，消除了容易导致乱序量子态和贫瘠高原的冗余参数维度；(2) 它自然而然地舍弃了复杂的相位信息，同时保留所有与测量相关的量，例如，某些基的广义性，如 Pauli-Z 可观察量，因为在计算 Z 基的概率时，复杂的相位因子会抵消并变得无关紧要；以及 (3) 在显著简化优化景观的情况下，保持完备性。此外，我们的设计需要在编码的量子数据中实施零复相位，形式上表示为 $\arg(\alpha_i) = 0$ ，其布洛赫球动态示意图如图 ?? 所示。一旦 $|\psi_{in}(\Theta, z)\rangle$ 被 $\hat{S}(\theta)$ 转换后，我们使用对最终量子态的投影测量来提取编码在我们 QINR 中的视场属性。

量子电路测量。从 $\hat{S}(\theta)$ 中提取一个 m 维表示 ($m \leq n$)，我们在前 m 个量子比特上实现局部 Pauli 投影测量，有效地忽略（追踪出）剩余的 $n-m$ 个量子比特。相应的局部测量算子家族 $\{\hat{O}_i\}$ 正式定义在 n 量子比特的希尔伯特空间上为：

$$\hat{O}_i = (\otimes_{k=1}^{i-1} \mathbb{I}_k) \otimes \sigma_i^Z \otimes (\otimes_{l=i+1}^n \mathbb{I}_l), \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad (5)$$

其中 $\mathbb{I}_k$ 表示作用于 k 个量子比特上的恒等算子，保持其在张量积内的量子状态。算子 $\sigma_i^Z = |0\rangle\langle 0|_i - |1\rangle\langle 1|_i$ 表示施加在 i 个量子比特上的 Pauli-Z 可观测测量。局部测量有助于为电路提供稳健的梯度反馈 [12, 56]。 $\hat{S}(\theta)$ 的输出定义为有限次电路测量的期望值（附录 D 分析了电路测量对提取图像质量的影响）。这个期望值可以被表示为 V_{inf} ，它在渐近极限中随着测量次数趋向无穷大而定义为：

$$V_{inf}(\Theta) = \text{Tr}(\hat{\rho}(\Theta) \hat{M}(\theta)), \quad \hat{M}(\theta) = \hat{S}(\theta)^\dagger \hat{O} \hat{S}(\theta). \quad (6)$$

³ 贫瘠高原是指随着电路深度的增加，损失函数中的梯度幅度呈指数衰减；详情请参见第 A.3 节

$\hat{M}(\theta)$ 表示一种参数化的测量基，用于通过我们完全纠缠电路 $\hat{S}(\theta)$ 的西量子演化来近似最佳测量基 $\hat{M}_{\text{opt}}$ 。类似于经典的通用逼近理论，具有足够深度的量子电路可以近似任意酉变换。Solovay-Kitaev 定理对近似给定精度 ϵ 的任意酉操作所需的量子门的数量给出了严格的理论上限，由 $O(4^n \log^4(1/\epsilon))$ 给出。电路深度 $\mathcal{J}$ 类似于经典神经网络的层数，及相应的组成西量子门的总数是我们 $\hat{S}(\theta)$ 的超参数。对应于 i 个量子比特的局部测量被注入映射到目标场的相应维度，要求量子比特数为 $n \geq m$ 。接下来，我们详细描述在贝叶斯框架下对模型的端到端训练协议。

对 $\hat{S}(\theta)$ 的初始化。我们使用已建立的 PQC 初始化策略，即恒等和高斯；请参见图 ?? 了解架构影响。对于恒等初始化，深度为 $j \in \{1, \dots, J\}$ 的每个电路层 $\hat{S}(\theta)_j$ 可以表示为子电路 S_R ，后接其厄米共轭 F_R 。然后，通过将 $\theta_k \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$ 分配给 S_R 来构建 $\hat{S}(\theta)_j$ ，根据定义也初始化为 F_R 。这确保了在训练之前，所有层的复合操作 $\hat{S}(\theta)_j = S_R F_R$ 串接在一起，相当于零电路深度（恒等电路）。请注意，虽然初始配置强制执行 $S_R F_R = I$ ，但在优化 [21] 期间不维持这一约束。

对于高斯初始化， $\hat{S}(\theta)_j = S_{G_j}$ 的可训练参数是从均值为零且方差与电路深度相关的高斯分布中采样的，即 $\theta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathcal{J}))$ [64]。总体电路架构 $\hat{S}(\theta)$ 是通过连接 $\mathcal{J}$ 块 $\hat{S}(\theta)_j$ 来获得的，使得总体的酉变换由 $\hat{S}(\theta) = \prod_{j=1}^{\mathcal{J}} \hat{S}(\theta)_j$ 给出。请注意，保持跨块的架构同质性，可以系统地探索酉空间 $\mathcal{U}(2^n)$ 。QVF 训练。考虑数据集 X ，它由 W 个不同的视觉字段组成，表示为 X_i ，对于 $i \in \{1, \dots, W\}$ 。每个数据字段 X_i 封装了物理字段属性 s_i^j ，例如图像中的像素值或用于几何表示的 SDF 的签名距离，在特定空间坐标 Θ_i^j 处采样；这里，索引 j 表示每个字段的样本索引。空间坐标和物理属性之间的关系由函数 f 定义，因此每个字段内的采样点由以下给出：

$$X_i = \{(\Theta_i^j, s_i^j) | s_i^j = f(\Theta_i^j), j \in \{0, 1, \dots, M\}\}, \quad (7)$$

其中 M 是每个字段的样本数量。值得注意的是，每个数据字段 X_i 都与一个唯一的潜在代码 z_i 相关联。在训练之前，每个 z_i 从零均值多维高斯分布中随机采样，正式表示为 $z_i \sim \mathcal{N}(0, I)$ 。训练目标是最大化条件概率分布 $p_{\theta}(s|\Theta)$ ，其中 θ 表示 QVF 的可训练参数：

$$p_{\theta}(s|\Theta) = \sum_{i,j} p_{\theta}(s_i^j | \Theta_i^j, z_i) p(z_i). \quad (8)$$

在足够大的数量的独立同分布量子电路测量中，条件似然性 $p_{\theta}(s_i^j | \Theta_i^j, z_i)$ 可以通过高斯分布来近似。此陈述由中心极限定理 (CLT) 支持，该定理建立了具有有限方差的众多独立同分布随机变量的和（或平均）的渐近正态性。因此， $p_{\theta}(s_i^j | \Theta_i^j, z_i)$ 可以近似为

$$p_{\theta}(s_i^j | \Theta_i^j, z_i) \approx \exp\left(-\mathcal{L}^2(V(z_i, \Theta_i^j; \theta), s_i^j)\right), \quad (9)$$

其中 $\mathcal{L}(\cdot)$ 表示量化电路 $V(z_i, \Theta_i^j; \theta)$ 的输出与观察到的物理属性 s_i^j 之间差异的损失函数；关于我们在实验

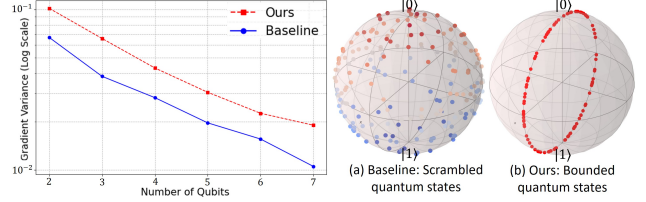


Figure 2. (左:) 梯度方差的比较 (y 轴为对数刻度); (右:) 可达量子态的可视化。

中使用的指标的更多详情，请参阅 Sec. 4 的开头。模型训练因此可以在贝叶斯框架下被表述为最大化条件似然。为了确保在潜在空间中的平滑表示过渡，关于 z_i 的先验分布被轻度惩罚以遵循平滑分布；一个各向同性零均值多元高斯分布是一个合理的选择，正如 Park 等人所采用的那样 [41]。损失函数 $L_{\theta, z}$ ，通过对所有学习得到的 W 字段 $\{s_i | i = 1, \dots, W\}$ 进行训练最小化，每个 s_i 包含 M 个样本，公式化为：

$$L_{\theta, z}(\Theta, s) = \sum_{i,j=1}^{W,M} (\mathcal{L}(V(z_i, \Theta_i^j; \theta), s_i^j) + \gamma \|z_i\|_2). \quad (10)$$

QVF 进行端到端训练：经典参数通过梯度下降更新，而量子参数则通过参数偏移规则 [38] 进行优化。使用及应用。一旦训练好了，我们可以以基于坐标的方式查询 QVF 以获取编码的二维或三维表示。我们还可以进行部分样本推断，从而可以通过潜在空间优化实现图像修补和部分形状补全等应用。使用最大后验估计 (MAP)，我们识别出一个潜在编码 $\hat{z}$ ，使其与输入的部分观察 $\hat{X}_i$ 的匹配度最大化，同时保持预训练模型不变：

$$\hat{z} = \underset{z}{\operatorname{argmin}} \sum_{(\Theta_j, s_j)} \mathcal{L}(V(z_i, \Theta_j; \theta), s_j) + \gamma^2 \|z\|_2. \quad (11)$$

算法总结。我们在附录中的算法 1 中总结了 QVF 的训练协议。

4. 实验评估

我们通过实验评估我们的 QVF，用于学习视觉场景表示，包括 2D 图像和 3D 形状，同时系统分析其在信号插值意义上的泛化能力以及处理缺失和遮挡区域的能力。我们使用 1) 来自 CIFAR-10 数据集 [29] 和具有丰富光谱细节的高分辨率图像 [19]，以及 2) 来自 ShapeNet [13] 数据集的 3D 形状。我们报告了平均三次重复实验所得出的广泛使用的指标，即用于 2D 图像表示保真度的均方误差 (MSE) 和峰值信噪比 (PSNR)，以及用于 3D 形状的 3D 平均绝对误差 (MAE)。实现细节。我们在由 PennyLane [8] 提供的无噪声端模拟器上经验性地评估该模型。我们采用 Adam 优化 [28]，初始学习率为 $\eta = 10^{-3}$ ，并应用于学习率调度器，当达到平台期时，窗口大小为 50 轮时触发（按比例缩放 η 通过 0.9）。训练轮数设定为 $5k$ ，以及方程 (10) 中的 $\gamma = 10^{-3}$ 。我们使用具有 40 GB 内存的 A100 GPU。硬件和效率。由于缺乏大规模、容错的量子硬

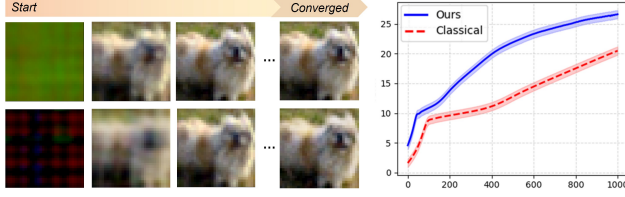


Figure 3. (a) Reconstructed images during training: (top) our QVF and (bottom) classical model; (b) PSNR learning curves.

件，当前的量子机器学习模型被迫依赖于在经典硬件上运行的指数级昂贵的模拟器；见表 ??。对于深度为 $\mathcal{J}$ 的 n 个量子位的电路，经典无噪模拟器上未加速的计算复杂性为 $O(2^{3n}\mathcal{J})$ 。

我们通过实验表明，将量子变换限制为 $\hat{S}(\theta)$ 中的实值么正操作（导致有界的 Haar 随机性）有助于梯度流动。由于量子电路参数在 $[0, 2\pi)$ 内本质上是周期性的，我们在此范围内均匀采样参数并量化其期望值来评估梯度流动。由于期望损失梯度的零均值特性（参见附录 A.3），消失梯度现象由方差衰减率支配。因此，我们量化梯度方差 Var_{grad} 为

$$\text{Var}_{\text{grad}} = E_{\theta \sim U([0, 2\pi))} \left[\text{Var} \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \langle \hat{M} \rangle_{\theta} \right\}_{t=1}^T \right) \right], \quad (12)$$

其中“ $\text{Var}(\cdot)$ ”表示方差算子， $T = 500$ 是评估期望值的样本数量。 $\langle \hat{M} \rangle_{\theta}$ 是 $\hat{S}(\theta)$ 的期望值，并且 k 遍历 ansatz 参数。图 2 报告了随着量子比特数量增加对于两个 ansatzes，即我们的 QVF 和 QIREN [65]，使用强纠缠的量子电路允许希尔伯特空间中的混乱（即非受限）量子态。我们观察到，我们具有有界 Haar 随机性的 ansatz 维持了更强的梯度流动，这对于其可训练性和高效表示学习至关重要。

我们使用 QVF 评估图像表示学习，从单个图像开始。我们首先将 QVF 与一个等同于 QVF 经典部分的经典模型进行比较，因此由于其 ansatz，QVF 会有 170 个参数的额外开销。这意味着学习行为和最终表示准确性的差异主要是由于 ansatz 的归纳偏差造成的。图 3-(a) 可视化了来自中间和收敛 QVF 的图像。图 3-(b) 绘制了前一千个训练周期的学习曲线 (PSNR)，因此突出了训练进程中的差异。在评价过程中，对于其他试验也观察到了类似的现象。在低频空间域中，我们的 QVF 表现与经典基线相当，而在包含丰富高频细节的区域，QVF 显著加速了学习。我们还实验了 Rath 等人手工编码策略 [43]，该策略在收敛时并没有产生可识别的表示——这一观察与他们的结果一致。我们随后将 QVF 与 QIREN [65] 进行基准测试，这是与我们最相关的 QINR 方法，也是我们最接近的竞争对手。虽然 QIREN 在经典层之间夹杂了一个量子 ansatz，QVF 仅使用一个经典组件进行数据编码。为了公平比较，我们使用相同的量子资源预算对 QVF 和 QIREN 进行评估，即 $n = 5$ 个量子比特，并在 50 张不同的图像上评估性能。我们保留了 QIREN 的原始配置（见附录 C.2

）。表 1 报告了平均指标。结果表明，结合 Siren 的 QVF 在 MSE 上比 QIREN 高出 30%，在 PSNR 上高出 1.6 分贝。接下来，我们通过潜变量条件进行图像集合的表征学习，即我们配置 QVF 同时学习 50 张图像。请注意，QIREN 不支持此实验设置，因此我们将 QVF 与经典的基础 INR 方法对比，即具有 ReLU 激活的 MLP 和 Siren。比较遵循相同的评估协议，基线与 QVF 之间的唯一区别在于 ansatz 的存在；结果概述在表 2 中。最后，我们重复这一实验，使用由詹姆斯·韦布空间望远镜记录的四张更高分辨率的图像 (QINR 文献中最高的分辨率)；结果见图 ??-(b)。接下来，我们考虑 1) 在未来量子硬件上部署 QVF，2) 可能降低表示保真度的物理因素，例如测量不确定性。由于有限采样引起的随机效应，从 ansatz 中提取的视觉场在保真度（准确性和质量）上可能有所不同。在附录 D 中，我们模拟（并在图 9 中可视化）通过我们预训练的 QVF 编码的图像表示，跨越不同数量的 N_{shot} 次采样，显示随着采样精度增加的结果场的特征。

Ansatz 配置。接下来我们评估 QVF 的架构变化。我们研究关键超参数的影响：1) ansatz 宽度，即 n 个量子位的数量；2) 电路深度 $\mathcal{J}$ ；和 3) 经典模块用于将数据编码到量子态中的潜在空间维度 p 。见图 6 的结果：扩展 QVF 的 ansatz，即增加 $\mathcal{J}$ 和宽度 n （同时保持其他参数不变），在两种情况下都能带来性能提升。此外，QVF 稳健扩展，并不受到显著的可训练性问题影响。用于整合非线性数据先验和准备编码量子态的经典模块的表达能力构成了架构基础。随着 p 的增加，我们观察到一致的性能提升。我们在实验中选择的默认配置 $n = 5$ 、 $\mathcal{J} = 5$ 和 $p = 128$ 是为了考虑 QVF 在模拟器 [8] 上的运行时间。参数缩放分析。根据设计，QVF 由两个组件组成：1) 用于神经振幅编码的经典模块；2) ansatz。由于我们在 QVF 中利用了一个小型 MLP，其参数化呈二次增长，即相对于潜在空间维度 $O(p^2)$ 。同时，我们的量子 ansatz 的参数缩放与其深度 $O(n\mathcal{J})$ 相关。虽然 ansatz 对总参数数量的影响可以忽略不计，但它极大地提高了整体性能（参见图 3）。更多的参数化细节见附录 C.2。

4.1. 三维（形状）表示学习

接下来，我们评估以 SDF 形式进行的 3D 形状几何表示学习。这一设定首次在 QINRs 背景下进行研究；它在 QINR 的可扩展性方面以及由于形状拓扑的变化而带来了挑战。与图像类似，我们对 3D 形状集合进行表示学习。我们从 ShapeNet [13] 中选择三个形状，并在每个形状的 100 个 k 空间点处非均匀采样签署距离，以便于更好的表面细节捕获的近表面更高采样密度。注意，尽管这个实验设置的规模对于经典模型而言可以被视为中等，但它显著推进了 QINR 模型的可行规模（尽管仍受限于模拟器的性能）。我们从 2D 图片的实验中继承了实验设置，并在表 2 中汇报收敛后的表示准确性。基线设置同样是具有不同激活函数的 MLPs，包括与 DeepSDF 方法 [41] 对应的 ReLU。可以使用 Marching Cubes [33] 从查询的签署距离中提取不同分

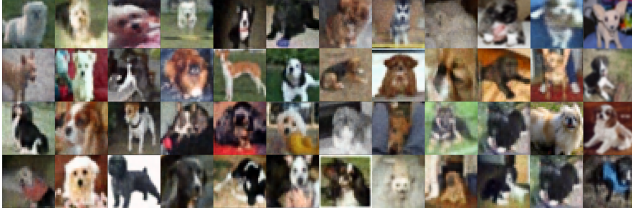


Figure 4. Visualisation of the reconstructed images (CIFAR-10 [29]) conditioned on a latent space variable.

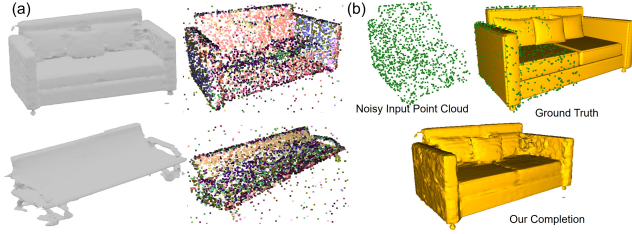


Figure 5. (a): Geometry representation using QVF. Each shape is obtained using Marching Cubes [33] with latent-space-conditioned SDF inference; field samples are coloured with estimated normals. (b): Shape completion from partial inputs using QVF.

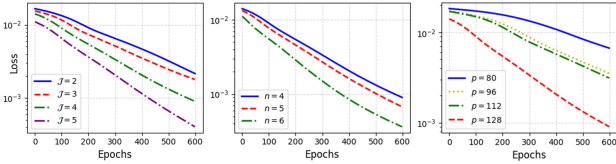


Figure 6. 消融研究考虑影响模型性能的模块 (2D 图像)。从左到右: 1) 电路深度 J ; 2) 量子比特数量 n ; 3) 每层隐藏神经元维度 p 。

辨率的最终网格, 如图 5 -(a) 所示。

4.2. QVF 支持的应用程序

QVF 支持应用如潜在空间中的视觉场插值、图像修复和形状完成。图 ?? -(c) 展示了在收敛的 QVF 中编码的 3D 形状的线性潜在空间插值, 即经典 INR 文献中常见的实验设置 [41]。QVF 还支持图像和形状的完成, 首先通过采样 $\hat{z}$ 并使用 MAP 优化其值; 详情见第 Sec. ?? 节。第二步, 通过利用优化后的潜在码和推断缺失区域来完成; 请参见图 5 -(b) 和 App. E 中的定性结果。

5. 讨论与结论

我们的 QVF 是一个用于视觉场隐式表示学习的新 QML 框架。在量子硬件模拟器上的实验中, 我们观察到 QVF——即使只有最少的经典组件——能够在图像和 3D 形状等数据模态中实现高表示保真度。此外, QVF 比先前的 QINR 方法 QIREN (相似模型规模) 表现更好, 并且在基本经典基线中具有竞争力。ansatz 配置和消融研究突出了每个 QVF 模块的影响。我们的

Method	MSE ($\times 10^{-3}$) $\downarrow$	PSNR $\uparrow$
Ours (Gaussian)+ReLU	0.98 ± 0.09	30.06 ± 1.0
Ours (identity)+ReLU	0.99 ± 0.09	30.02 ± 1.0
Ours (Gaussian)+Siren	0.55 ± 0.04	32.59 ± 0.2
Ours (identity)+Siren	0.54 ± 0.04	32.67 ± 0.3
QIREN [65]	0.78 ± 0.05	31.03 ± 0.2

Table 1. Numerical results for 2D representation learning, for the previous QINR method QIREN [65] and our QVF.

Method	Images		3D Shapes
	MSE ($\times 10^{-3}$) $\downarrow$	PSNR $\uparrow$	MAE ($\times 10^{-3}$) $\downarrow$
Ours (Gaussian)+ReLU	1.02 ± 0.11	29.8 ± 1.1	0.99 ± 0.07
Ours (Identity)+ReLU	1.03 ± 0.09	29.5 ± 1.2	1.10 ± 0.09
MLP+ReLU [41]	2.17 ± 0.13	26.57 ± 0.51	1.43 ± 0.14
Ours (Gaussian)+Siren	0.62 ± 0.05	32.2 ± 0.3	0.27 ± 0.05
Ours (Identity)+Siren	0.72 ± 0.06	31.4 ± 0.4	0.32 ± 0.05
MLP+Siren [53]	1.19 ± 0.08	29.2 ± 0.4	0.48 ± 0.06

Table 2. Numerical results for 2D and 3D representation learning, for our QVF and classical baselines, including DeepSDF [41].

消融研究证实了足够的电路深度在 ansatz 深度和高表示准确性之间取得平衡。根据我们的预期和理论预测, QVF 在学习高频信号细节 (图 3) 方面效率很高, 同时比所有比较方法训练速度更快。作为 QINR 方法中的首个, QVF 支持图像和 3D 形状集合的联合表示学习, 以及图像修复和 3D 形状填充等应用。最后, 我们强调这项工作侧重于通过基础方法创新推进 QINR 的挑战。因此, 我们打算在绝对标准上挑战经典的精心设计模型。我们将在项目页面上发布我们的 QVF 实现。

限制。尽管 QVF 在性能和视觉场支持规模方面比之前的 QINR 方法有显著改进, 但由于量子硬件模拟开销, 目前实验规模仍然受到限制。然而, 在容错门量子计算机出现之前, 这些问题影响所有现有应用的 QML 工作。

未来工作。我们看到了各种有希望的后续发展方向和 QVF 改进的方法。一个可能的方向是探索一种具有较低计算复杂性的可学习量子吉布斯状态的准备 (例如, 张量列分解 [36])。我们还预见到其他具有挑战性的开放问题, 例如从 2D 图像进行 3D 重建和神经渲染, 可以采用 QVF 作为一种表示。我们还相信, 未来可以在 QINR 环境中采用许多来自 INR 文献中的技巧和进一步的想法 (例如, 空间划分结构和非刚性泛化) [45, 54, 57] 和 [55, Secs. 4.2 and 4.3]。致谢。我们感谢 Natacha Kuete Meli, Daniele Lizzio Bosco 和 Thomas Leimkuehler 对手稿的有益评论。这项工作部分地得到了德国研究基金会 (DFG, German Research Foundation), 项目编号 534951134 的支持。

[1] Google Quantum AI and Collaborators. Quantum error correction below the surface code threshold. Nature

- , 2024. 12
- [2] Mahabubul Alam, Satwik Kundu, Rasit Onur Topaloglu, and Swaroop Ghosh. Quantum-classical hybrid machine learning for image classification. In International Conference On Computer Aided Design (ICCAD) , 2021. 12
 - [3] Mohammad H Amin, Evgeny Andriyash, Jason Rolfe, Bohdan Kulchitskyi, and Roger Melko. Quantum boltzmann machine. *Physical Review X* , 8(2):021050, 2018. 3, 11
 - [4] Hankyul Baek, Won Joon Yun, and Joongheon Kim. 3d scalable quantum convolutional neural networks for point cloud data processing in classification applications. *arXiv preprint 2210.09728* , 2022. 2
 - [5] Carter Ball and Thomas D Cohen. Boltzmann distributions on a quantum computer via active cooling. *Nuclear Physics A* , 1038:122708, 2023. 3
 - [6] Marcello Benedetti, Erika Lloyd, Stefan Sack, and Mattia Fiorentini. Parameterized quantum circuits as machine learning models. *Quantum Science and Technology* , 4(4):043001, 2019. 11
 - [7] Marcel Seelbach Benkner, Zorah Löhner, Vladislav Golyanik, Christof Wunderlich, Christian Theobalt, and Michael Moeller. Q-match: Iterative shape matching via quantum annealing. In International Conference on Computer Vision (ICCV) , pages 7586–7596, 2021. 2
 - [8] Ville Bergholm, Josh Izaac, Maria Schuld, Christian Gogolin, Shahnawaz Ahmed, Vishnu Ajith, M Sohaib Alam, Guillermo Alonso-Linaje, B AkashNarayanan, Ali Asadi, et al. PennyLane: Automatic differentiation of hybrid quantum-classical computations. *arXiv preprint 1811.04968* , 2018. 2, 4, 5, 12, 13
 - [9] Jacob Biamonte, Peter Wittek, Nicola Pancotti, Patrick Rebentrost, Nathan Wiebe, and Seth Lloyd. Quantum machine learning. *Nature* , 549(7671), 2017. 2
 - [10] Tolga Birdal, Vladislav Golyanik, Christian Theobalt, and Leonidas J Guibas. Quantum permutation synchronization. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2021. 2
 - [11] Dmytro Bondarenko and Polina Feldmann. Quantum autoencoders to denoise quantum data. *Physical review letters* , 124(13):130502, 2020.
 - [12] Marco Cerezo, Akira Sone, Tyler Volkoff, Lukasz Cincio, and Patrick J Coles. Cost function dependent barren plateaus in shallow parametrized quantum circuits. *Nature communications* , 12(1):1791, 2021. 3, 11
 - [13] Angel X. Chang, Thomas Funkhouser, Leonidas Guibas, Pat Hanrahan, Qixing Huang, Zimo Li, Silvio Savarese, Manolis Savva, Shuran Song, Hao Su, Jianxiong Xiao, Li Yi, and Fisher Yu. ShapeNet: An Information-Rich 3D Model Repository. *arXiv preprint 1512.03012* , 2015. 4, 5
 - [14] Dongdong Chen, Lu Yuan, Jing Liao, Nenghai Yu, and Gang Hua. Stylebank: An explicit representation for neural image style transfer. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , pages 1897–1906, 2017. 2
 - [15] Yinbo Chen, Sifei Liu, and Xiaolong Wang. Learning continuous image representation with local implicit image function. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2021. 2
 - [16] Iris Cong, Soonwon Choi, and Mikhail D Lukin. Quantum convolutional neural networks. *Nature Physics* , 15(12):1273–1278, 2019. 2
 - [17] Emilien Dupont, Adam Goliński, Milad Alizadeh, Yee Whye Teh, and Arnaud Doucet. Coin: Compression with implicit neural representations. *arXiv preprint 2103.03123* , 2021. 2
 - [18] Matteo Farina, Luca Magri, Willi Menapace, Elisa Ricci, Vladislav Golyanik, and Federica Arrigoni. Quantum multi-model fitting. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , pages 13640–13649, 2023. 2
 - [19] Jonathan P. Gardner. James Webb Space Telescope. <https://webb.nasa.gov/content/multimedia/images.html>, 2022. 4
 - [20] Vladislav Golyanik and Christian Theobalt. A quantum computational approach to correspondence problems on point sets. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2020. 2
 - [21] Edward Grant, Leonard Wossnig, Mateusz Ostaszewski, and Marcello Benedetti. An initialization strategy for addressing barren plateaus in parametrized quantum circuits. *Quantum* , 3:214, 2019. 4
 - [22] Alfred Haar. Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen. *Annals of Mathematics* , 34(1): 147–169, 1933.
 - [23] Gerhard Hellstem. Hybrid quantum network for classification of finance and mnist data. In International Conference on Software Architecture Companion (ICSA-C) , 2021. 12
 - [24] Zoë Holmes, Kunal Sharma, Marco Cerezo, and Patrick J Coles. Connecting ansatz expressibility to gradient magnitudes and barren plateaus. *PRX Quantum* , 3(1):010313, 2022. 11
 - [25] Laurent Valentin Jospin, Hamid Laga, Farid Boussaid, Wray Buntine, and Mohammed Bennamoun. Hands-on bayesian neural networks—a tutorial for deep learning users. *IEEE Computational Intelligence Magazine* , 17(2):29–48, 2022. 11
 - [26] Muhammad Kashif and Saif Al-Kuwari. Design space exploration of hybrid quantum-classical neural networks. *Electronics* , 10(23):2980, 2021. 12
 - [27] Iordanis Kerenidis, Jonas Landman, Alessandro Lungu, and Anupam Prakash. q-means: A quantum algorithm for unsupervised machine learning. *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)* , 32, 2019. 11
 - [28] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint 1412.6980* , 2014. 4

- [29] Alex Krizhevsky, Geoffrey Hinton, et al. Learning multiple layers of features from tiny images. University of Toronto , 2009. 4, 6
- [30] Yunzhu Li, Shuang Li, Vincent Sitzmann, Pulkit Agrawal, and Antonio Torralba. 3d neural scene representations for visuomotor control. In Conference on Robot Learning , pages 112–123. PMLR, 2022. 2
- [31] Junhua Liu, Kwan Hui Lim, Kristin L Wood, Wei Huang, Chu Guo, and He-Liang Huang. Hybrid quantum-classical convolutional neural networks. Science China Physics, Mechanics & Astronomy , 64(9):290311, 2021. 12
- [32] Seth Lloyd, Masoud Mohseni, and Patrick Rebentrost. Quantum principal component analysis. Nature Physics , 10(9):631–633, 2014. 11
- [33] William E Lorensen and Harvey E Cline. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. In Seminal graphics: pioneering efforts that shaped the field , pages 347–353. ACM, 1998. 5, 6
- [34] Jarrod R McClean, Sergio Boixo, Vadim N Smelyanskiy, Ryan Babbush, and Hartmut Neven. Barren plateaus in quantum neural network training landscapes. Nature communications , 9(1):4812, 2018. 11
- [35] Natacha Kuete Meli, Vladislav Golyanik, Marcel Seelbach Benkner, and Michael Moeller. QuCOOP: A versatile framework for solving composite and binary-parametrised problems on quantum annealers. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2025. 2
- [36] Ar Melnikov, Alena Termanova, Sergey Dolgov, Florian Neukart, and MR Perelshtein. Quantum state preparation using tensor networks. Quantum Science and Technology , 8(3):035027, 2023. 6
- [37] Ben Mildenhall, Pratul P Srinivasan, Matthew Tancik, Jonathan T Barron, Ravi Ramamoorthi, and Ren Ng. Nerf: Representing scenes as neural radiance fields for view synthesis. Communications of the ACM , 65(1):99–106, 2021. 2
- [38] Kosuke Mitarai, Makoto Negoro, Masahiro Kitagawa, and Keisuke Fujii. Quantum circuit learning. Physical Review A , 98(3):032309, 2018. 4
- [39] Amirali Molaei, Amirhossein Aminimehr, Armin Tavakoli, Amirhossein Kazerouni, Bobby Azad, Reza Azad, and Dorit Merhof. Implicit neural representation in medical imaging: A comparative survey. In International Conference on Computer Vision (ICCV) , pages 2381–2391, 2023. 2
- [40] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information . Massachusetts Institute of Technology, 2000. 2
- [41] Jeong Joon Park, Peter Florence, Julian Straub, Richard Newcombe, and Steven Lovegrove. DeepSDF: Learning continuous signed distance functions for shape representation. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2019. 2, 4, 5, 6, 14
- [42] Nasim Rahaman, Aristide Baratin, Devansh Arpit, Felix Draxler, Min Lin, Fred Hamprecht, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. On the spectral bias of neural networks. In International conference on machine learning , pages 5301–5310. PMLR, 2019. 2
- [43] Lakshika Rathi, Edith Tretschk, Christian Theobalt, Rishabh Dabral, and Vladislav Golyanik. 3D-QAE: Fully quantum auto-encoding of 3d point clouds. In The British Machine Vision Conference (BMVC) , 2023. 2, 5, 13
- [44] Patrick Rebentrost, Masoud Mohseni, and Seth Lloyd. Quantum support vector machine for big data classification. Physical review letters , 113(13):130503, 2014. 11
- [45] Christian Reiser, Songyou Peng, Yiyi Liao, and Andreas Geiger. Kilonerf: Speeding up neural radiance fields with thousands of tiny mlps. In International Conference on Computer Vision (ICCV) , 2021. 6
- [46] Merel A Schalkers and Matthias Möller. On the importance of data encoding in quantum boltzmann methods. Quantum Information Processing , 23(1):20, 2024.
- [47] Philipp Schleich, Marta Skreta, Lasse Kristensen, Rodrigo Vargas-Hernandez, and Alán Aspuru-Guzik. Quantum deep equilibrium models. In Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS) , pages 31940–31967, 2024. 2
- [48] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. An introduction to quantum machine learning. Contemporary Physics , 56(2):172–185, 2015. 11
- [49] Maria Schuld, Alex Bocharov, Krysta M Svore, and Nathan Wiebe. Circuit-centric quantum classifiers. Physical Review A , 101(3):032308, 2020.
- [50] Maria Schuld, Ryan Sweke, and Johannes Jakob Meyer. Effect of data encoding on the expressive power of variational quantum-machine-learning models. Physical Review A , 103(3):032430, 2021. 11
- [51] Arsenii Senokosov, Alexandr Sedykh, Asel Saginalieva, Basil Kyriacou, and Alexey Melnikov. Quantum machine learning for image classification. Machine Learning: Science and Technology , 5(1):015040, 2024. 12
- [52] Kodai Shiba, Katsuyoshi Sakamoto, Koichi Yamaguchi, Dinesh Bahadur Malla, and Tomah Sogabe. Convolution filter embedded quantum gate autoencoder. arXiv preprint 1906.01196 , 2019. 2
- [53] Vincent Sitzmann, Julien Martel, Alexander Bergman, David Lindell, and Gordon Wetzstein. Implicit neural representations with periodic activation functions. In Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS) , pages 7462–7473, 2020. 3, 6
- [54] Towaki Takikawa, Joey Litalien, Kangxue Yin, Karsten Kreis, Charles Loop, Derek Nowrouzezahrai, Alec Jacobson, Morgan McGuire, and Sanja Fidler. Neural geometric level of detail: Real-time rendering with implicit 3d shapes. In Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) , 2021. 6
- [55] Ayush Tewari, Justus Thies, Ben Mildenhall, Pratul Srinivasan, Edgar Tretschk, Wang Yifan, Christoph

- Lassner, Vincent Sitzmann, Ricardo Martin-Brualla, Stephen Lombardi, et al. Advances in neural rendering. In *Computer Graphics Forum* , pages 703–735. Wiley Online Library, 2022. [6](#)
- [56] Supanut Thanasilp, Samson Wang, Nhat Anh Nghiem, Patrick Coles, and Marco Cerezo. Subtleties in the trainability of quantum machine learning models. *Quantum Machine Intelligence* , 5(1):21, 2023. [3](#), [11](#)
- [57] Edgar Tretschk, Ayush Tewari, Vladislav Golyanik, Michael Zollhöfer, Christoph Lassner, and Christian Theobalt. Non-rigid neural radiance fields: Reconstruction and novel view synthesis of a dynamic scene from monocular video. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)* , 2021. [6](#)
- [58] Vadim Tschernezki, Iro Laina, Diane Larlus, and Andrea Vedaldi. Neural feature fusion fields: 3d distillation of self-supervised 2d image representations. In *International Conference on 3D Vision (3DV)* , pages 443–453, 2022. [2](#)
- [59] Samson Wang, Enrico Fontana, Marco Cerezo, Kunal Sharma, Akira Sone, Lukasz Cincio, and Patrick J Coles. Noise-induced barren plateaus in variational quantum algorithms. *Nature communications* , 12(1): 6961, 2021. [11](#)
- [60] Manuela Weigold, Johanna Barzen, Frank Leymann, and Marie Salm. Data encoding patterns for quantum computing. In *Conference on Pattern Languages of Programs* , 2020.
- [61] David Wierichs, Josh Izaac, Cody Wang, and Cedric Yen-Yu Lin. General parameter-shift rules for quantum gradients. *Quantum* , 6:677, 2022.
- [62] Yiheng Xie, Towaki Takikawa, Shunsuke Saito, Or Litany, Shiqin Yan, Numair Khan, Federico Tombari, James Tompkin, Vincent Sitzmann, and Srinath Sridhar. Neural fields in visual computing and beyond. In *Computer Graphics Forum* , pages 641–676. Wiley Online Library, 2022.
- [63] Jan-Nico Zaech, Alexander Liniger, Martin Danelljan, Dengxin Dai, and Luc Van Gool. Adiabatic quantum computing for multi object tracking. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* , pages 8811–8822, 2022. [2](#)
- [64] Kaining Zhang, Liu Liu, Min-Hsiu Hsieh, and Dacheng Tao. Escaping from the barren plateau via gaussian initializations in deep variational quantum circuits. *Advances in Neural Information Processing Systems* , 35: 18612–18627, 2022. [4](#)
- [65] Jiaming Zhao, Wenbo Qiao, Peng Zhang, and Hui Gao. Quantum implicit neural representations. In *International Conference on Machine Learning (ICML)* , 2024. [1](#), [2](#), [5](#), [6](#), [11](#), [12](#), [13](#)

Quantum Visual Fields with Neural Amplitude Encoding

— Appendix —

本附录补充了主论文，从第 A 节开始，详细介绍了基于门的量子计算的背景。内容涵盖了量子物理基础及其在机器学习和 INR 中的应用。它还连接了量子电路测量和贝叶斯推断（见第 A.4 节）。第 B 节接着讨论了当前实际可用量子硬件的发展状态。然后，在第 C 节中，我们拓展了相关文献，概述了完整的算法（训练）协议；可视化实验中使用的量子 ansatz 架构；并在第 ?? 节中提供了更多的实现细节以及对数据编码表达能力的深入分析。在实验方面，我们在第 D 节进一步分析了图像表示质量与测量重复次数（shots）的依赖关系，之后在第 ?? 节中研究了 QVF 在噪声电路中的性能。QVF 支持的应用，比如图像修复和形状补全，在第 E 和第 F 节进行讨论，而 3D 形状的额外可视化则展示在第 G 节。

A. 背景

A.1. 基于门的量子计算初步知识

量子比特。量子处理单元 (QPU) 的基本信息单元是量子比特，即经典计算中的比特的类似物。与经典比特确定性地表示一个可能的状态 (0 或 1) 不同，量子比特可以统计地同时表示两种不同的信息状态，用括-夹记号表示为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 。

叠加是区分量子比特与经典比特的基本特性：它赋予量子比特以 $|\psi\rangle$ 和 $|1\rangle$ 状态的组合形式存在的能力，使得：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (13)$$

与 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 和 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 的。量子比特状态 $|\psi\rangle$ 可视化在一个布洛赫球上（参见图 7）或以矢量形式表达：

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (14)$$

量子力学中的测量本质上采用统计方法来提取数值信息。对于用算子 $\hat{O}$ 测量的量子比特状态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ （必须是厄米的，即 $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$ ），这意味着分别测量状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 中存储的信息（即测量算子 $\hat{O}$ 的特征值）的概率为 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ ：

$$\hat{O}|0\rangle = \kappa|0\rangle \text{ and } \hat{O}|1\rangle = \delta|1\rangle, \quad (15)$$

，其中 κ 和 δ 是测量算子 $|O\rangle$ 的特征值。测量的关键方面是被称为波函数坍缩的现象，即投影测量导致 $|\psi\rangle$ 坍缩到算子的特征态 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ ，这取决于测量，即 κ 或 δ 。纠缠进一步将量子计算与经典计算区分开来。在经典情况下，存储在比特中的信息是独立的，即测量一个比特不会影响其他任何比特。在量子领域中，量子比特可以通过纠缠高度相关，以至于一个量子比特的状态与另一个有关，尽管它们在物理上相距很远并且之间没有通信渠道。例如，一个二维量子比特系统的通用信息状态 $|\psi\rangle_2$ 可以表示为：

$$|\psi\rangle_2 = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \quad (16)$$

，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 使得 $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$ 。如果 $|\psi\rangle_2$ 不能表示为两个量子比特 $|\psi\rangle_{a1}$ 和 $|\psi\rangle_{a2}$ 的张量积，则二维量子比特系统被认为是纠缠的，这表明在不互相干扰的情况下不能独立测量其信息，即，

$$|\psi\rangle_2 \neq |\psi\rangle_{a1} \otimes |\psi\rangle_{a2}. \quad (17)$$

旋转算子。负责在 Bloch 球体上沿 x -、 y -和 z -轴旋转量子比特状态 $|\psi\rangle$ 的算子称为旋转算子。任何单量子比特算子 $\hat{R}$ 可以表示为此类旋转算子 $\hat{R}_x, \hat{R}_y, \hat{R}_z$ 的组合，即 $\hat{R}(\theta, \tau, \gamma) = \hat{R}_x(\theta)\hat{R}_y(\tau)\hat{R}_z(\gamma)$ 与角度 θ, τ 和 γ ：

$$\begin{aligned} \hat{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -i\sin(\frac{\theta}{2}) \\ -i\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}, \\ \hat{R}_y(\tau) &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\tau}{2}) & -\sin(\frac{\tau}{2}) \\ \sin(\frac{\tau}{2}) & \cos(\frac{\tau}{2}) \end{bmatrix}, \text{ and} \\ \hat{R}_z(\gamma) &= \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

保利算符 $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ 代表上述旋转算符的特定实例，即分别沿 x 轴、 y 轴和 z 轴旋转 π 弧度。这些算符也可以在计算基 $|0\rangle, |1\rangle$ 中表示为矩阵，如下所示：

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

薛定谔方程。量子计算涉及根据量子力学原理操纵信息，其基础是基于时间相关薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (20)$$

其中 $\hbar$ 为约化普朗克常数， $|\psi(t)\rangle$ 为随时间演变的量子态； $\hat{H}$ 是量子系统的哈密顿算符。因此，量子态的演变可以通过以下关系描述：

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(t) dt} |\psi(0)\rangle, \quad (21)$$

其中 $\hat{T}$ 表示时间排序算符， $|\psi(0)\rangle$ 是演变前的量子态。对于时间独立的 $\hat{H}$ ，这可以简化为 $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle$ 。使用更紧凑的符号，薛定谔方程也可以等效表示为：

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(\hat{H}, t) |\psi(0)\rangle, \text{ with} \quad (22)$$

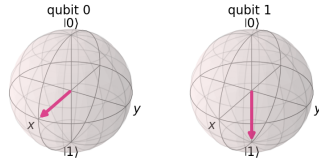


Figure 7. 量子比特状态的 Bloch 球可视化。量子比特 0: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ ，量子比特 1: $|\psi\rangle = |1\rangle$ 。

$$\hat{U}(\hat{H}, t) = e^{-\frac{it}{\hbar} \hat{H}}. \quad (23)$$

要对量子比特进行旋转运算，可以将系统哈密顿算符 $\hat{H}$ 设置为 $E\hat{\sigma}$ ，条件为 $\hat{\sigma} \in \{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ 。通过替换 $\eta = 2Et/\hbar$ ，我们得到：

$$\hat{U}(\hat{H}, t) = e^{-\frac{it}{\hbar} \hat{H}} = e^{-\frac{i\eta}{2} \hat{\sigma}} = \hat{R}_{\sigma}(\eta), \quad (24)$$

$\hat{R}_{\sigma}(\eta)$ 是保利旋转算符， E 是由 $\hat{H}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle$ 描述的量子系统的能量。

A.2. 量子机器学习 (QML) 综述

量子计算提升机器学习算法的潜力导致量子机器学习 (QML) 的出现 [48]，这是一门利用量子力学现象可能解决在经典上无法处理的学习问题的学科，通过增强的计算范式 [48]。QML 的核心是：1) 特征映射，将经典输入数据编码为量子态；2) 变分近似方案，对量子态进行量子变换。已经证明，PQC 是渐近通用函数逼近器 [6, 50]。已经探索了几种标准化的 QML 算法，包括量子主成分分析 [32]、量子支持向量机 [44]、量子玻尔兹曼机 [3] 和量子 k 均值聚类 [27]。

特征映射。将经典欧几里得数据 $\mathbf{x}$ 集成到量子计算框架中需要进行非平凡的映射，将其转化为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的量子态 $|\psi(\mathbf{x})\rangle$ 。现有几种既定的编码技术，包括基编码、幅度编码、哈密顿演化编码，每种技术在量子比特效率和电路深度复杂性上各有不同的权衡。然而，最优编码方案的确定仍是一个开放的研究挑战，因为编码保真度 $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = |\langle \psi_{\text{ideal}}(\mathbf{x}) | \psi_{\text{encoded}}(\mathbf{x}) \rangle|^2$ 、资源需求和任务特定的性能指标（例如，分类准确性或函数逼近误差 ϵ ）之间的关系在不同问题域上的特性尚不清楚。

变分 Ansatz。嵌入在状态 $|\psi(x)\rangle$ 中的经典信息的量子演化需要参数化酉 Ansatz $\hat{U}(\theta) \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$ 作用于 n 量子比特系统。物理上，Ansatz 是通过此类酉变换的顺序组合构建的，形式上表达为 $\hat{U}(\theta) = \mathcal{T} \left(\prod_{i=1}^t \hat{U}_i(\theta_i) \right)$ ，其中 $\mathcal{T}$ 表示管理门序列实现的时间排序算符。这引入了一个希尔伯特空间变换 $\hat{U}(\theta) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ，通过操作 $|\phi(x, \theta)\rangle = \hat{U}(\theta) |\psi(x)\rangle$ 将输入状态映射到处理后的输出状态。

测量。通过利用厄米观测量 $\hat{O}$ 对演化后的量子态 $|\phi(x)\rangle$ 进行投影测量，量子计算最终在于从中提取统计数据，其中计算输出形式上定义为期望值： $V(x) = \langle \phi(x) | \hat{O} | \phi(x) \rangle$ 。根据玻恩规则，测量使量子态塌缩，从而将获取嵌入的经典信息限制在从重复测量中得到的统计估计值。观测量 $\hat{O}$ 的选择从根本上决定了测量协议的信息理论容量及其计算复杂度。

训练变分 Ansatz。与构建计算图并进行反向传播不同，训练量子电路仅涉及前向评估。为了最小化依赖测量的代价函数，确切的梯度可以通过在基向量的移位参数下进行量子电路评估来计算，表示为：

这种技术，即参数平移规则，利用单位门生成器的三角结构（其中 $\hat{U}_i(\theta_i) = e^{-i\theta_i \hat{G}_i}$ ）来实现硬件兼容的梯度估计，而无需数值近似或持续的电路内存（相对于需要可微分计算图的经典反向传播的一个关键优势）。

QML 利用对编码数据的单位量子操作来学习通常表示为期望值的函数，其中 $\hat{O}$ 是厄米可观察量。量子演化的单位性质保留了内积和范数，确保了编码数据的频谱成分通过量子电路进行变换。 $\hat{O} = \sum_k \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k|$ 的频谱分解揭示了 $f(x) = \sum_k \lambda_k |\langle e_k | \psi(x) \rangle|^2$ 中类傅里叶结构，其中投影 $\langle e_k | \psi(x) \rangle$ 作为傅里叶系数，而特征值 λ_k 与可访问的频率相关。这一基本属性是量子力学的结果：单位变换保留频谱成分，确保即使是复杂的量子电路也本质上在频率域中操作。因此，QML 模型的表现能力直接与其可访问的频率成分相关，影响其推广和学习结构化数据表示的能力。

A.3. 关于贫瘠高原的综述

训练一个变分 Ansatz $\hat{S}(\theta)$ 基本上受到贫瘠高原现象的限制，其中随机参数初始化导致整个希尔伯特空间中成本函数梯度的指数级消失。正如 McClean 等人通过测度集中分析正式证明的那样：

“... 对于一类广泛的合理参数化量子电路，沿任何合理方向梯度为零的概率在某些固定精度下以指数级减小，作为量子比特数量的函数。”

这种现象也被称为贫瘠高原，可以通过数学形式来表达一个有 n 个量子比特的系统：

$$\mathbb{E}_w[\partial_w L(w)] = 0, \quad \text{Var}_w[\partial_w L(w)] \in O\left(\frac{1}{\nu^n}\right), \quad \nu > 1, \quad (25)$$

，其中 ν 描述了电路的纠缠能力。方差界的尺度表明，梯度估计器需要 $O(\nu^n)$ 个测量样本以保持恒定的精度，导致指数级的资源开销，使得对 $n \gg 1$ 的实际优化变得不可行。这带来了挑战，尤其是对于基于梯度的学习。导致贫瘠高原的因素包括可观性局部性 [12, 56]，特定的噪声模型 [59]，以及一种接近 2-设计的 ansatz，即与 Haar 随机幺正矩阵匹配到二阶矩 [24, 34]。这些因素强调了选择合适的初始化协议，量子 ansatz 设计和可观变量的重要性。

A.4. 参数化量子电路与贝叶斯推理的连接

由于量子电路本质上是概率模型，它们与贝叶斯推理在概念上有相似之处。在贝叶斯神经网络 (BNNs) 中，概率输出来自于由先验分布支配的参数，训练的重点在于最大化观察数据标签的条件似然，同时隐含地更新参数的后验分布。对于参数化量子电路 (PQC)，虽然它们利用确定性参数，但由于量子测量的随机性，它们表现出概率性输出，根据中心极限定理，数量足够大的测量结果会近似于高斯分布。尽管 PQC 的概率输出允许基于贝叶斯原理进行解释，它们的训练并不本质上涉及参数的后验推断，除非明确地在贝叶斯框架内进行 [25]。这一区别强调 PQC 的贝叶斯解释源自它们的测量统计数据，而不是固有的概率参数空间。

B. 现有基于门的量子硬件

类似于之前的工作 [65]，由于现实中量子硬件在高层次和实用的视觉计算任务方面尚不成熟，我们在模拟

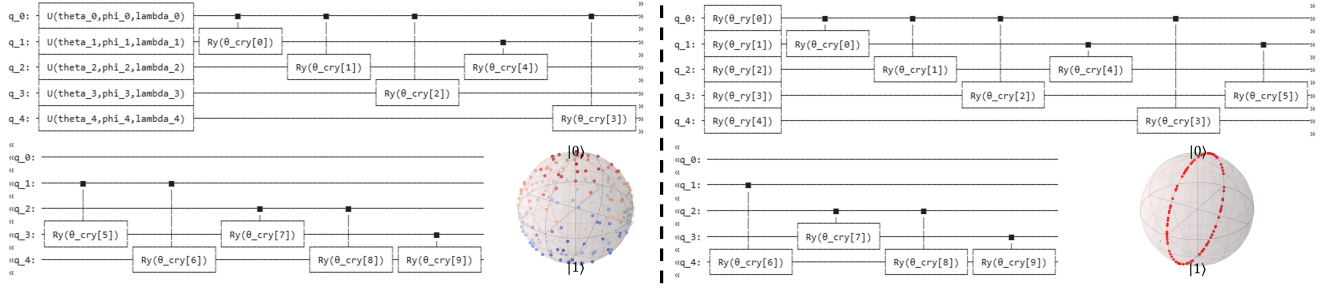


Figure 8. 在希尔伯特空间中展示 ansatz 设计及其示例性的可遍历量子态：强纠缠 ansatz（左）和 QVF（右）。在右下方，可视化了不同电路 ansatz 的可遍历态。

Algorithm 1 QVF 训练协议

- 1: Input: Training dataset $X = \{(\Theta_i, s_i)\}_{i=1}^W$; number of qubits n ; epochs N_{epoch} ; measurement shots N_{shot} ; parameters $\theta = \{\theta_q, \theta_c\}$; inverse temperature β .
- 2: for epoch = 1 to N_{epoch} do
- 3: Classical Inference (Sec. 3.1):
- 4: Compute energy spectrum $E(\Theta_i; \theta_c)$.
- 5: Evaluate Gibbs distribution:

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \text{ where } Z = e^{-\beta E_j}.$$

- 6: Quantum State Preparation:
- 7: Initialise $\hat{\rho}_0 = \sum_{i=1}^{2^n} P_i |i\rangle \langle i|$.
- 8: Quantum Evolution (Sec. ??):
- 9: Apply ansatz $\hat{S}(\theta_q) = \prod_{\ell=1}^J e^{-i\theta_{q,\ell} \hat{H}_\ell}$ to obtain:
- 10: Measurement and Observables:
- 11: Estimate $\langle \hat{M}_k \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(\theta_q) \hat{M}_k]$ for $k = 1, \dots, K$.
- 12: Gradient Computation of the Loss $\mathcal{L}$ (Sec. ??):
- 13: Quantum: $\partial \langle \hat{M}_k \rangle / \partial \theta_q$ via parameter-shift rule.
- 14: Classical: $\nabla_{\theta_c} \mathcal{L}$ via automatic differentiation through $E(\Theta_i; \theta_c)$.
- 15: Parameter Update:
- 16: Adam optimiser step with learning rate η :

$$\theta \leftarrow \theta - \eta (\nabla_{\theta_c} \mathcal{L}, \nabla_{\theta_q} \mathcal{L}).$$

- 17: end for
- 18: Output: Optimised parameters θ_q^*, θ_c^* .

器 [8] 上评估了提出的 QVF。现有的基于门的量子平台——包括超导电路、离子阱、中性原子、光子系统和量子点——正处于不同的发展阶段，尚未达到大规模、容错计算所需的成熟度。限制因素包括噪声敏感性、由

于量子退相干导致的有限执行时间以及纠错的必要性。然而，随着经典机器学习系统的规模不断扩大，带来了前所未有的计算和能源需求，量子计算技术和硬件的快速进展 [1] 有望在可以预见的未来解决这些障碍，这突显了积极探索能在新兴量子计算机（如 QVF）上执行的应用程序的必要性。

C. 扩展文献讨论

最近的量子机器学习（QML）研究，包括 QIREN [2, 23, 26, 31, 51, 65]，采用了一种统一的架构范式——被称为三明治结构，其中量子电路嵌入在经典预处理和后处理层之间。这样的框架将参数化量子电路（PQC）定位为可训练的傅里叶特征编码器，理论上能够将经典输入投影到复杂的谱表示中，然后由经典模型进行处理。虽然这种设计通过用量子电路替代隐藏层来探索量子增强特征空间，从概念上与经典傅里叶特征网络（FFNs）相似，但量子生成的傅里叶特征的复杂性增加了经典模型在解码时的设计要求。

我们在算法 1 中提供了 QVF 的完整训练协议。

C.1. 详细变分假设可视化

我们还通过有界的 Haar 随机性可视化我们的 QVF 近似。图 8 比较了我们的方法和 QIREN 中的不受限于实数值酉运算的近似之间可达的 Hilbert 态。我们通过单比特旋转和量子比特间纠缠模式的参数化来突出电路结构。通过对该近似进行采样，可达的量子态将在 Bloch 球面上进行可视化。

C.2. 附加实现细节

接下来我们提供关于实验设置的额外实现细节。QVF 和 QIREN 的参数化。QVF 被设计为一个紧凑的 QINR 模型。与 QIREN 相比，QVF 无需经典后处理，同时保持较高的表示精度。在我们的实验中，参数数量是 $0.52 \cdot 10^5$ （对应于 $p = 128$ ）。分别为 QVF 和 QIREN。QVF 的 ansatz 配置为 $J=5$ 和 $n=5$ ，而对于 QIREN，我们使用源代码中的默认深度。准备量子吉布斯态时的模拟稳定性。在模拟量子吉布斯态的准备时，分区函数的评估涉及大和小哈密顿本征值的指数运算；参见公式 (2) 和 (3)，这可能导致数值不稳定。我们使用

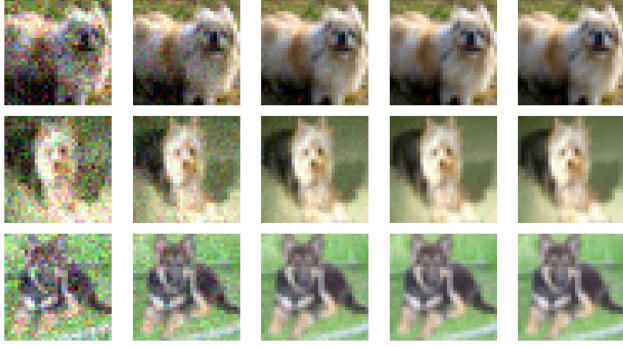


Figure 9. Qualitative images retrieved from a pre-trained QVF under the different number of circuit shots. From left to right, shot counts are 100, 500, 10^3 and 10^4 , respectively. The rightmost images represent the ground truth.

log-sum-exp 技巧，这是一个为该问题广泛认可的数值稳定技术。

C.3. 数据编码的表达能

接下来我们理论分析数据编码对模型表达能力的影响。

Lemma 1 Energy inference exhibits functional equivalence to determining optimal non-linear input-dependent frequency spectrum embedded within variational quantum circuits, defining the model’s inherent expressiveness.

如同 Schuld 等人所示，形式为 $U(x) = W^2 g(x) W^1$ 的变分电路在测量电路期望值 $\langle \hat{M} \rangle$ 时承认一种截断傅里叶展开：

$$\langle \hat{M} \rangle = \langle 0 | W^{1\dagger} g(x)^\dagger \tilde{M} g(x) W^1 | 0 \rangle = \sum_{w \in \Omega} c_w e^{i w x}, \quad (26)$$

，其中 W^1 和 W^2 是任意么正矩阵。有效测量算符定义为： $\tilde{M} = W^{2\dagger} \hat{M} W^2$ ，而 $g(x)$ 作为应用于物理系统的数据编码模块。值得注意的是，不同于 Schuld 等人——其编码门分析限制为用于数据编码的 Pauli 门—— $g(x)$ 可以包含更一般的操作。制备的输入量子态 $|\psi_{in}(x)\rangle$ 可以被等效地表示为

$$|\psi_{in}(x)\rangle = g(x) W^1 | 0 \rangle, \quad (27)$$

，建立推断能量景观与频谱 Ω 之间的直接对应关系，其中依赖关系被编码在可学习的能量推断框架中。最优有效测量基由 $\hat{M}_{opt} = W_{opt}^2 \hat{M} W_{opt}^1$ 给出，同时伴随着启发式的可学习电路设计 $\hat{S}(\theta)$ ，它近似为 W_{opt}^2 。

D. 使用不同数量样本（次）的图像表示

在有限采样下，图像的量子信息噪声比（QINR）主要由量子测量固有的统计不确定性决定。图像质量取决于拍摄次数，即 QINR 查询的重复次数。我们在图 9 中通过逐步减少从 100 到 10^4 增加拍摄次数的情况下

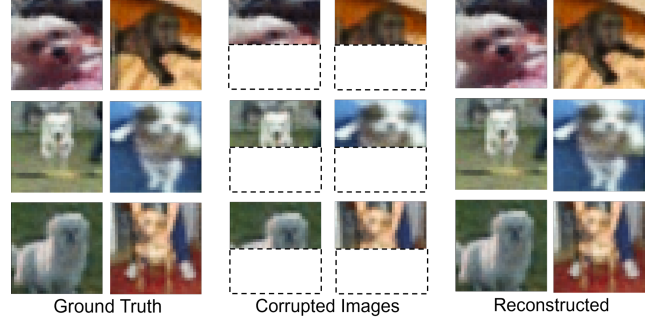


Figure 10. 使用在 50 张图像集合上预训练的 QVF 获得的一些图像修复结果。

Method	no noise	$\sigma = 0.01$	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$
Ours (Gaussian) + ReLU	30.06 ± 0.1	30.1 ± 0.1	28.42 ± 0.1	25.78 ± 0.2
Ours (Identity) + ReLU	30.02 ± 0.2	29.6 ± 0.1	27.98 ± 0.2	25.96 ± 0.2
Ours (Gaussian) + Sin	32.59 ± 0.2	32.4 ± 0.2	30.66 ± 0.1	27.94 ± 0.2
Ours (Identity) + Sin	32.67 ± 0.3	32.8 ± 0.2	30.34 ± 0.2	28.12 ± 0.2

Table 3. QVF 的性能在有噪声电路的情况下（二维图像 PSNR）。 σ 是模拟量子电路不忠实度的扰动比例。

的拍摄噪声伪影，来展示拍摄次数 N_{shot} （每张图像总计）的影响。不同拍摄次数所观察到的噪声模式是所提出的 QVF 的 ansatz 的特征，将作为未来研究的参考。

带有量子电路噪声的评估可以为 QVF 在近期量子硬件上的实际部署提供有价值的见解。因此，我们研究量子门不忠度对 QVF 性能的影响，即，量子操作中错误和噪声的主要来源。门操作不忠度源于量子硬件中本质的控制不完美，导致实际执行的门操作与期望行为之间存在随机偏差。这些不完美限制了门的保真度到有限精度，可以有效地建模为在有限范围内的零均值扰动。为了模拟这种噪声的影响，我们引入了具有变化标准差的零均值高斯扰动：较高的值对应于当前近期量子设备的典型噪声水平，而较低的值反映了未来硬件的预期改进。这些实验在选定的 2D 图像上执行，使用与主要部分（第 ?? 节）中相同的 PennyLane 量子硬件模拟器 [8]。我们在表 3 中报告了不同量子门扰动比 σ 下的结果，以量化在不同噪声环境下性能的退化。正如预期，增大 σ 导致 2D 图像 PSNR 的下降。即使在 $\sigma = 0.1$ 下，我们也实现了 PSNR 为 ~ 25 dB 或更高（参见图 9）。

E. 应用于图像修复

QIREN [65] 和 3D-QAE [43] 的局限性在于它们依赖于固定的潜在表示或刚性的插值机制，因此无法从部分或损坏的输入中重建完整、连贯的输出。QVF 通过将量子电路的拓扑结构基于查询点和动态潜在空间进行调整，解决了此类限制，从而实现了如图像修补等应用。对于具有遮挡或损坏像素的图像，该电路识别潜在空间中的一个向量，以最小化量子电路所学习的预测多维属性与观察到的噪声值之间的差异。优化后的潜在向量对量子电路进行调节，从而实现丢失场属性的

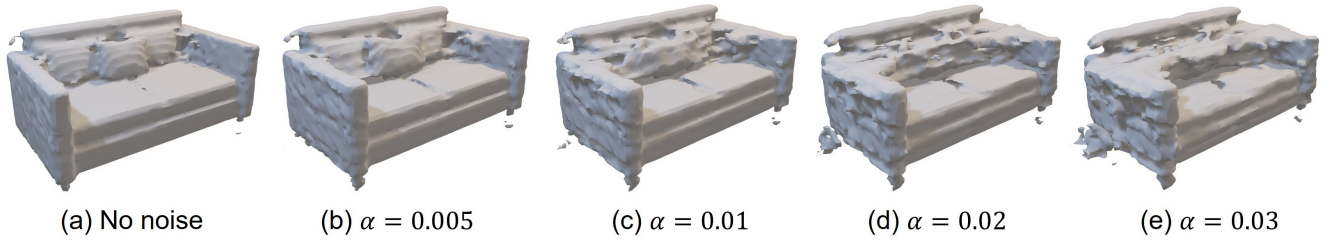


Figure 11. 使用预训练的 QVF 从部分且有噪声的输入深度图完成 3D 形状的可视化； α 是噪声比率。

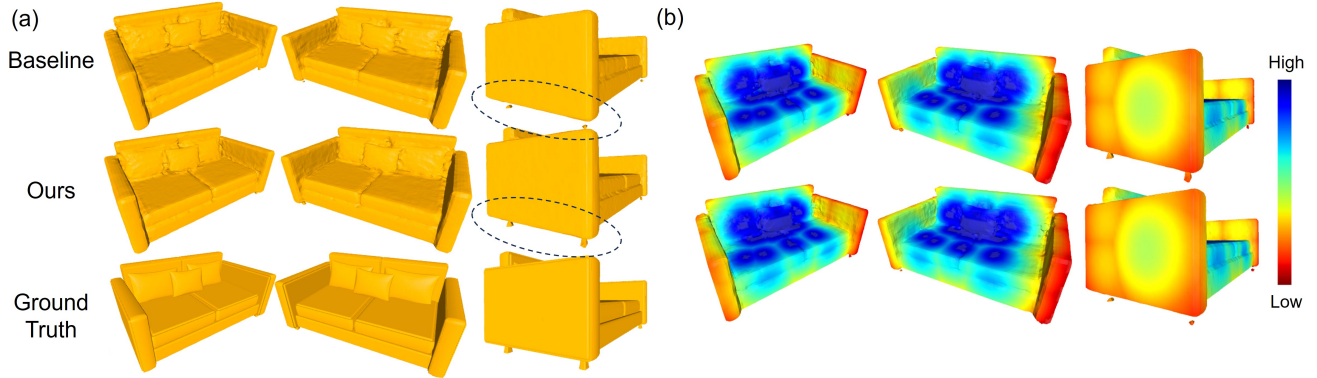


Figure 12. (a) 使用 QVF 和经典基准 [41] 的几何表示比较；底部显示的是真实值；(b) 通过颜色编码的 Hausdorff 距离图可视化表示保真度：颜色代表与真实值的距离。渲染图像使用颜色渐变（蓝色 > 绿色 > 黄色 > 红色）表示递减的 Hausdorff 距离水平。

恢复。根据实验结果，我们遮挡了一半的图像像素，并通过该协议重建完整的图像。使用在 50 图像上预训练的 QVF 进行图像修补的代表性结果在图 Fig. 10 中可视化，展示了 QVF 在这种极端稀疏性下也能提供令人满意的性能并准确恢复图像，这使得 QVF 成为这些任务中一个很有前途的量子电路架构。QVF 还可以在将来实现对更大规模图像先验的学习。

F. 应用于从部分且有噪声的深度图进行形状补全

类似于图像修复，QVF 可以用于在给定噪声深度图时完成 3D 几何的任务。我们采用与图像相似的设置，通过在深度维度上裁剪一半的样本来实现。然后，我们研究施加于深度图上的零均值高斯噪声在不同扰动比例 α 下的效果；参见图 5 -(b)。形状补全性能在逐步增加的扰动比例下进行量化，参数化为 $\alpha \in \{0, 0.005, 0.01, 0.02, 0.03\}$ ，其中 $\alpha = 0$ 对应于理想化的无噪声场景。这种定性分析表明，随着噪声的增加，重建保真度会单调下降，正如图 11 中通过渐进的几何失真和表面不规则性所证明的那样。

G. 附加三维几何可视化

结合表格 2 中的定量结果摘要，图 12 -(a) 提供了重建的三维几何结构的定性比较，对比了经典基线 [41] 与 QVF。基线在表示细节时表现出拓扑不一致的趋势。

QVF 展示了增强的结构连贯性，生成了无可见伪影的拓扑完整的几何结构，其保存细粒度特征的能力证明了这一点。使用颜色编码的每表面 Hausdorff 距离分布的进一步几何分析（见图 12 -(b)），揭示了基线（上）和我们方法（下）的系统几何偏差。这证实了 QVF 在细粒度细节（如沙发腿）上的高三维表现逼真度。同时，两种模型的颜色分布很好地对齐，意味着 QVF 继承了经典组件的表现力并进一步增强了它。这种基本的相互依赖性需要平衡的联合设计：尽管量子电路扩展通过希尔伯特空间探索增强了表现力，其操作保真度关键依赖于经典网络提供准确编码查询坐标的能力。QVF 的最佳特性需要在经典模型组件的表现能力和量子资源的配置之间找到平衡。